TS1

Contrôle du vendredi 1er juin 2018 (50 minutes)

I. (16 points)

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.
Les parties A, B, et C sont indépendantes.

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking.

On décide de modéliser cette durée d'attente exprimée en minutes par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

1°) Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

2°) Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois la voiture garée, la durée de stationnement en minutes de cette voiture est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ et d'écart-type $\sigma = 30$.

1°) Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ? On donnera la valeur arrondie au millième.

2°) À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?

3°) La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

On pose $p_1 = P(\mathrm{Y} < 15)$, $p_2 = P(15 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 60)$, $p_3 = P(60 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 120)$, $p_4 = P(120 < \mathrm{Y} \leqslant 180)$.

a) On note S la variable aléatoire qui, à un automobiliste choisi au hasard fréquentant ce parking souterrain, associe le tarif en euros qu'il devra payer.
Déterminer les valeurs que peut prendre S puis donner la loi de probabilité de S en utilisant p_1, p_2, p_3, p_4 sous forme d'un tableau.

b) Déterminer t pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.
On donnera d'abord l'expression de t en fonction de p_1, p_2, p_3, p_4 puis la valeur de t arrondie au centième.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Déterminer la probabilité qu'une voiture ait un temps de stationnement compris entre un quart d'heure et une heure.
On donnera la valeur arrondie au millième.

Barème :

Partie A	1°) 2 points
	2°) 2 points
Partie B	1°) 2 points
	2°) 2 points
	3°) a) 2 points
	3°) b) 2 points
Partie C	4 points

II. (4 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 650$ et d'écart-type σ.
On sait que $P(\mathrm{X} \leqslant 649) = 0,158$.
Calculer $P(649 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 651)$.

Corrigé du contrôle du 1-6-2018

I.

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.
Les parties A, B, et C sont indépendantes.

Dans chaque partie, on notera P la loi de probabilité qui modélise la situation envisagée.

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking.

On décide de modéliser cette durée d'attente exprimée en minutes par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

1°) Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

$$P(\mathrm{T} \leqslant 2) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Avec la calculatrice, on obtient $P(\mathrm{T} \leqslant 2) = 0,6321205588...$

La valeur arrondie au millième de cette probabilité est 0,632.

On peut détailler le calcul de la probabilité de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{T} \leqslant 2) &= \int_0^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^3 \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2\times 0,5} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

2°) Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

On cherche à calculer une probabilité conditionnelle.
On cherche $P(\mathrm{T} \leqslant 2 / \mathrm{T} \geqslant 1)$.

On utilise la propriété de durée de vie sans vieillissement : $P(\mathrm{T} \geqslant t+h / \mathrm{T} \geqslant t) = P(\mathrm{T} \geqslant h)$ $P(\mathrm{T} \leqslant t+h / \mathrm{T} \geqslant t) = P(\mathrm{T} \leqslant h)$ avec t et h réels positifs ou nuls.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{T} \leqslant 2 / \mathrm{T} \geqslant 1) &= P(\mathrm{T} \leqslant 1) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(détail possible du calcul à l'aide d'une intégrale)} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on obtient $P(\mathrm{T} \leqslant 2 / \mathrm{T} \geqslant 1) = 0,393469340...$.

La valeur arrondie au millième de la probabilité cherchée est donc 0,393.

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

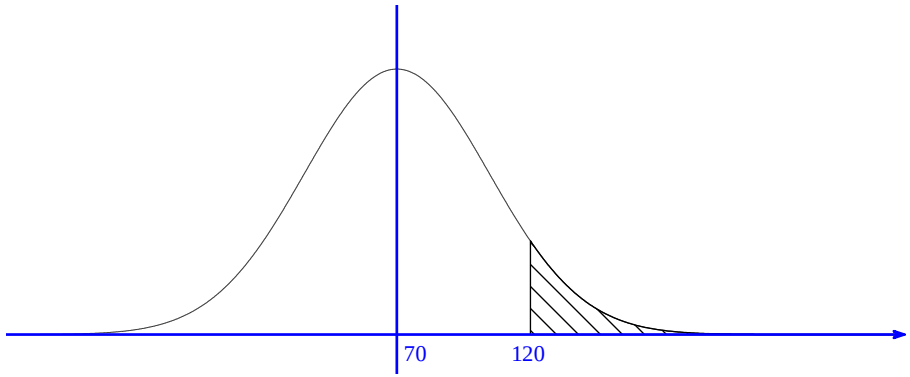
Une fois la voiture garée, la durée de stationnement en minutes de cette voiture est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ et d'écart-type $\sigma = 30$.

1°) Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ? On donnera la valeur arrondie au millième.

On commence par convertir la durée en heures.

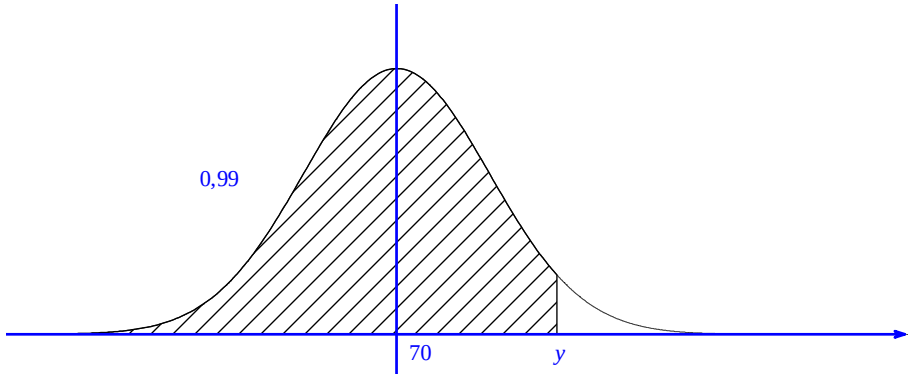
$1\ \mathrm{h} = 120\ \mathrm{min}$

On cherche $P(\mathrm{Y} \geqslant 120)$.
Avec la calculatrice, on peut calculer $P(120 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 10^{99})$ ou bien écrire $P(\mathrm{Y} \geqslant 120) = 0,5 - P(70 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 120)$ (cf. schéma ci-dessous qui permet de visualiser la relation grâce aux aires).



2°) À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?

On cherche le réel y tel que $P(\mathrm{Y} \leqslant y) = 0{,}99$.
On peut faire un schéma pour visualiser ce que l'on cherche.



Avec la calculatrice on obtient $y = 139{,}790436...$.

Le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures est, à la minute près, de 140 minutes.

3°) La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

On pose $p_1 = P(\mathrm{Y} < 15)$, $p_2 = P(15 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 60)$, $p_3 = P(60 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 120)$, $p_4 = P(120 < \mathrm{Y} \leqslant 180)$.

a) On note S la variable aléatoire qui, à un automobiliste choisi au hasard fréquentant ce parking souterrain, associe le tarif en euros qu'il devra payer.
Déterminer les valeurs que peut prendre S puis donner la loi de probabilité de S en utilisant p_1, p_2, p_3, p_4 sous forme d'un tableau.

s_i	0	3,5	$3{,}5+t$	$3{,}5+2t$	
$P(\mathrm{S}=s_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	Total $=1$

b) Déterminer t pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.
On donnera d'abord l'expression de t en fonction de p_1, p_2, p_3, p_4 puis la valeur de t arrondie au centième.

> On reste en littéral le plus longtemps possible.
> On ne fera les calculs à la calculatrice qu'à la fin (application numérique).

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{S}) &= 0\times p_1 + 3{,}5\times p_2 + (3{,}5+t)\times p_3 + (3{,}5+2t)\times p_4 \\ &= t(p_3+2p_4) + 3{,}5(p_2+p_3+p_4)\end{aligned}$$

On cherche t tel que $\mathrm{E}(\mathrm{S}) = 5$. On obtient immédiatement $t = \dfrac{5-3{,}5(p_2+p_3+p_4)}{p_3+2p_4}$.

On passe à l'application numérique sur calculatrice.

On obtient l'affichage : 2,384958345.

La valeur de t arrondie au centième est donc 2,38.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Déterminer la probabilité qu'une voiture ait un temps de stationnement compris entre un quart d'heure et une heure.
On donnera la valeur arrondie au millième.

On peut dire que $\mu' = 30$.

On commence par calculer l'écart-type σ'. Il est conseillé pour cela de représenter la densité de la loi normale.

1ère méthode :
On utilise la calculatrice.

Avec la touche $\boxed{\text{résol}}$.

E1 : $0.5 + \mathrm{normalFRép}(30, 37, 30, \mathrm{X})$
E2 : 0.75

On obtient l'affichage $\mathrm{X} = 10{,}37821897925$.

Ainsi $\sigma' = 10{,}37821897492...$

2e méthode :

On note Z la variable centrée réduite associée à T' ; Z est définie par $Z=\frac{T'-\mu'}{\sigma'}$.
On sait que Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

On note u le réel défini par $P(Z \leqslant u)=0,75$ (faire un schéma pour comprendre).

On a donc $\frac{7}{\sigma'}=u$ ce qui donne immédiatement $\sigma'=\frac{7}{u}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\sigma'=10,37...$

On calcule ensuite $P(15 \leqslant T' \leqslant 60)$.

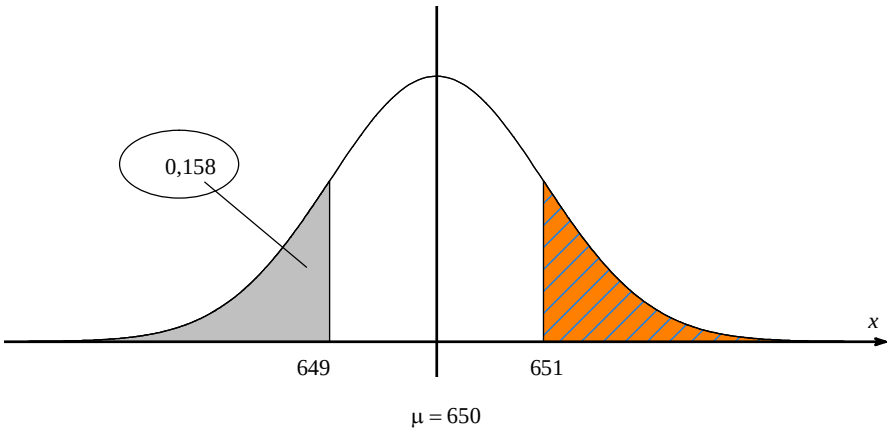
Avec la calculatrice, on obtient l'affichage 0,92389558323.

La valeur arrondie au millième de $P(15 \leqslant T' \leqslant 60)$ est 0,924.

II.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu=650$ et d'écart-type σ.
On sait que $P(X \leqslant 649)=0,158$.
Calculer $P(649 \leqslant X \leqslant 651)$.

On fait un schéma pour représenter la situation en traçant la représentation graphique de la fonction de densité de X dans un repère orthogonal.



On utilise ensuite la symétrie par rapport à la droite d'équation $x=650$.

$$P(649 \leqslant X \leqslant 651)=1-2P(X \leqslant 649)$$

$$=1-2\times 0,158$$

$$=0,684$$