$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 17 mai 2018 (3 heures)

I. (2 points)

On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes :

C_1 : (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0 ;

C_2 : u_0 et u_4 sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$ (E).

Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2018}$ (valeur exacte).

II. (2 points)

Mathieu dispose d'un capital de 20 000 euros qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.
Contrat A : Le capital augmente chaque année de 4 %.
Contrat B : Le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 310 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.

On considère l'algorithme suivant où les variables a et b sont des réels et la variable n est un entier naturel.

Initialisation :
a prend la valeur 20000
b prend la valeur 20000
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $a \leqslant b$ **Faire**
    a prend la valeur $1,04a$
    b prend la valeur $1,025b + 310$
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

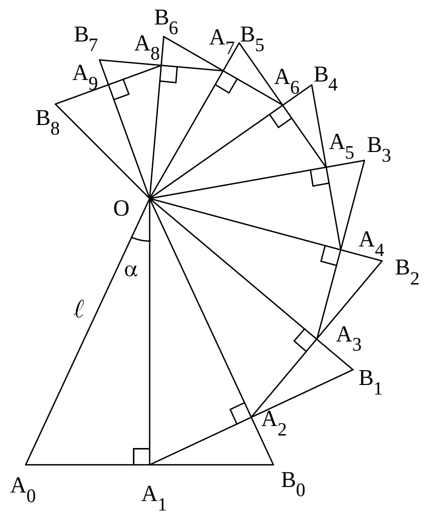
Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme. Recopier et compléter le tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les valeurs de a et de b seront arrondies à l'unité.

Étape	0	1
Valeur de *a*	20000	…………
Valeur de *b*	20000	…………
Valeur de *n*	0	…………
Condition $a \leqslant b$	Vraie	…………

Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
On répondra par une phrase.

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Dans le triangle OA_0B_0 isocèle en O, A_1 est le milieu du segment $[A_0B_0]$. On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à la droite (OB_0) et A_2 le milieu du segment $[A_1B_1]$. En réitérant le processus, on obtient, pour tout entier naturel n, une suite de triangles isocèles OA_nB_n (cf. figure ci-dessous).



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{A_0OA_1}$. On a $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

On pose $\ell = OA_0$.

On pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel n, α est la mesure en radians de l'angle $\widehat{A_nOA_{n+1}}$.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = OA_n$.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de α ; en déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de α.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = A_nA_{n+1}$.

Exprimer v_n en fonction de u_n.

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$.

Démontrer que $L_n = \ell \times \sin\alpha \times \dfrac{1-\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}$.

4°) Pour tout entier naturel n, on note w_n l'aire du triangle OA_nB_n.

Exprimer w_n en fonction de n, α et ℓ.

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Une compagnie de transport, dont la clientèle est composée d'usagers réguliers effectuant 40 trajets par mois (un le matin, un le soir sur 20 jours), étudie un projet offrant à ses usagers le choix entre :
- un titre de transport de 60 € pour l'ensemble des trajets mensuels ;
- pour les voyageurs ne voulant pas se procurer le titre de transport, le paiement d'une taxe de M € en cas de contrôle.

La compagnie prévoit d'organiser les contrôles de façon que la probabilité d'un tel contrôle soit pour chaque trajet égale à $\frac{1}{10}$, avec indépendance d'un trajet par rapport à l'autre.

On considère un usager régulier. On note X la variable aléatoire qui compte pour cet usager le nombre de trajets où il est contrôlé pendant un mois.

1°) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
Calculer le nombre moyen de trajets contrôlés c'est-à-dire l'espérance mathématique de X.

2°) Quel sera, en fonction de M, le coût moyen mensuel en euros des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport ?
En déduire la valeur M pour laquelle, en moyenne, les deux choix proposés aux usagers sont financièrement équivalents pour la compagnie.

3°) Calculer la probabilité que l'usager ait au moins 5 contrôles durant le mois. On donnera la valeur arrondie au millième.

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit ABCD un trapèze non croisé de bases $[\text{AB}]$ et $[\text{CD}]$ tel que les angles $\widehat{\text{BAD}}$ et $\widehat{\text{CDA}}$ soient droits.
On note I le milieu du segment $[\text{AD}]$.
On pose $\text{AB} = a$, $\text{CD} = b$ et $\text{AD} = c$.

1°) En décomposant convenablement les vecteurs $\overrightarrow{\text{IB}}$ et $\overrightarrow{\text{IC}}$, calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\text{IB}} \cdot \overrightarrow{\text{IC}}$ en fonction de a, b, c.

2°) Démontrer que l'angle $\widehat{\text{BIC}}$ est droit si et seulement si $c^2 = 4ab$.

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\text{A}(-1\,;2)$ et $\text{B}(3\,;-1)$.
Les questions sont indépendantes.

1°) On note I le point de l'axe des ordonnées tel que $\overrightarrow{\text{AI}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 1$.
a) Calculer l'ordonnée de I.
b) Calculer $\cos\widehat{\text{BAI}}$ (valeur exacte).

2°) On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[\text{AB}]$.
Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3°) Pour tout réel m on note D_m et D_m' les droites d'équations cartésiennes respectives $(m+1)x+(m-3)y+2=0$ et $(m-1)x+(m+3)y-2=0$.
Pour quelles valeurs de m les droites D_m et D_m' sont-elles perpendiculaires ?

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $\text{A}(a\,;0)$ et $\text{B}(0\,;a)$ où a est un réel strictement positif.
On note I le milieu de $[\text{OA}]$.

1°) En utilisant les coordonnées, calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BI}}$ en fonction de a.

2°) Pour cette question, il est demandé de ne pas calculer les coordonnées de H.
On note H le projeté orthogonal de A sur (BI).
À l'aide de p, calculer BH en fonction de a. En déduire AH en fonction de a.

3°) Déterminer, en rédigeant correctement, une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A tangent à (BI).

Prénom : ………………………………………… **Nom :** ……………………………………….

1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 17 mai 2018
(3 heures)

Feuille à insérer dans la copie préparée

I (2)	II (2)	III (4)	IV (3)	V (2)	VI (4)	VII (3)	Total/20

II. Tableau pour l'algorithme à faire ci-dessous :

Phrase réponse pour la valeur affichée en sortie de l'algorithme :

……...

Phrase réponse pour l'interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.

……...

……...

Conseils de rédaction à respecter (et à apprendre pour plus tard) :

I.

● Il est demandé de présenter soigneusement les calculs.

● On veillera à bien introduire toutes les lettres utilisées.

Exemple : « Soit r la raison de la suite (u_n) ».

● On s'efforcera autant que possible d'appliquer les formules « en situation ».

III. On veillera à bien quantifier les égalités sous la forme « $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = ...$ ».

IV.

1°) Il est demandé de répondre par une phrase selon le modèle « X suit la loi …. » en donnant toutes les précisions utiles.

V.

2°) On rédigera la réponse sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

$\widehat{\text{BIC}}$ est droit si et seulement si ….

si et seulement si ….

si et seulement si ….

On pourra éventuellement utiliser le symbole $\Leftrightarrow$ à la place du « si et seulement si ».

VI.

2°) On suivra le modèle de rédaction ci-dessous.
Pour la première ligne (et éventuellement la deuxième ligne), on attend une égalité de produit scalaire sans coordonnées.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$ ..…………….

$\Leftrightarrow$ ..…………….

$\Leftrightarrow$ ..…………….

Prénom : ……………………………………… **Nom :** ………………………………………

I. (2 points)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 17-5-2018

I.

On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes :

C_1 : (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0 ;

C_2 : u_0 et u_4 sont solutions de l'équation $x^2-2x-2=0$ (E).

Calculer $S=u_0+u_1+...+u_{2018}$ (valeur exacte).

Les solutions de (E) sont $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$ (résolution grâce au discriminant réduit).

Or d'après C_1, (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0 donc $u_0 \geqslant u_4$.

Comme d'après C_2, u_0 et u_4 sont solutions de (E), $u_0=1+\sqrt{3}$ et $u_4=1-\sqrt{3}$.

Soit r la raison de la suite (u_n).

On a $u_4=u_0+4r$ ce qui donne $1-\sqrt{3}=1+\sqrt{3}+4r$ d'où $r=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique, on a : $S=2019\times\dfrac{u_0+u_{2018}}{2}$.

En effet, la somme S comporte 2019 termes.

$$\begin{aligned}u_{2018}&=1+\sqrt{3}+2018\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=1+\sqrt{3}+2018\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=1+\sqrt{3}-1009\sqrt{3}\\&=1-1008\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S&=2019\times\frac{1+\sqrt{3}+1-1008\sqrt{3}}{2}\\&=2019\times\frac{2-1007\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{2019\times\left(2-1007\sqrt{3}\right)}{2}\\&=\frac{4038-2033133\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $S=2019-\dfrac{2033133\sqrt{3}}{2}$.

Remarques :

On ne travaille qu'avec des valeurs exactes.

Il est inintéressant de donner une valeur approchée de S (la calculatrice donne $S=-1758727,82\ldots$).

II.

Mathieu dispose d'un capital de 20 000 euros qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.
Contrat A : Le capital augmente chaque année de 4 %.
Contrat B : Le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 310 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.

On considère l'algorithme suivant où les variables a et b sont des réels et la variable n est un entier naturel.

Initialisation :
a prend la valeur 20000
b prend la valeur 20000
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $a \leqslant b$ **Faire**
  a prend la valeur $1,04a$
  b prend la valeur $1,025b+310$
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme. Recopier et compléter le tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les valeurs de a et de b seront arrondies à l'unité.

Étape	0	1
Valeur de *a*	20000	…………
Valeur de *b*	20000	…………
Valeur de *n*	0	…………
Condition $a \leqslant b$	Vraie	…………

Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
On répondra par une phrase.

Étape	0	1	2	3
Valeur de *a*	20000	20800	21632	22497
Valeur de *b*	20000	20810	21640	22491
Valeur de *n*	0	1	2	3
Condition $a \leqslant b$	Vraie	Vraie	Vraie	Faux

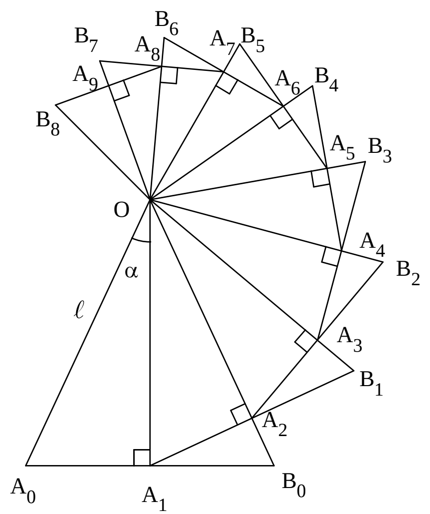
La valeur de n qui s'affiche en sortie est 3.

On vérifie cette valeur grâce à la calculatrice en réalisant le programme correspondant à l'algorithme.

L'algorithme affiche en sortie le nombre d'années au bout duquel le contrat A est plus avantageux pour Mathieu que le contrat B.

III.

Dans le triangle OA_0B_0 isocèle en O, A_1 est le milieu du segment $[A_0B_0]$. On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à la droite (OB_0) et A_2 le milieu du segment $[A_1B_1]$. En réitérant le processus, on obtient, pour tout entier naturel n, une suite de triangles isocèles OA_nB_n (cf. figure ci-dessous).



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{A_0OA_1}$. On a $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

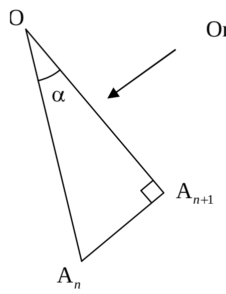
On pose $\ell = OA_0$.

On pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel n, α est la mesure en radians de l'angle $\widehat{A_nOA_{n+1}}$.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = \mathrm{OA}_n$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de α ; en déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de α.

On se place dans un triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ pour *n* quelconque (cf. figure ci-dessous présentant un tel triangle générique extrait de la « grande » figure de l'énoncé).

Ce triangle est toujours rectangle en A_{n+1}.



On extrait le triangle de la figure.

Fig. triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ pour *n* quelconque

Ainsi qu'on vient de le dire, le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est toujours rectangle en A_{n+1}.

On peut donc écrire $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{OA}_{n+1}}{\mathrm{OA}_n}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}{\mathrm{OA}_n}$.

On a donc $\mathrm{OA}_{n+1} = \mathrm{OA}_n \times \cos\alpha$.

On peut donc écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times \cos\alpha$.

D'après cette relation, la suite (u_n) est géométrique de raison $\cos\alpha$.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.
Exprimer v_n en fonction de u_n.

On se place dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ rectangle en A_{n+1}.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \sin\alpha \times \mathrm{OA}_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n \times \sin\alpha$.

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $L_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$.
Démontrer que $L_n = \ell \times \sin\alpha \times \dfrac{1-\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad L_n &= \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n \\
&= v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} \\
&= u_0 \times \sin\alpha + u_1 \times \sin\alpha + \ldots + u_{n-1} \times \sin\alpha \\
&= (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) \times \sin\alpha \\
&= u_0 \times \frac{1-(\cos\alpha)^{\text{nombre de termes}}}{1-\cos\alpha} \times \sin\alpha \quad \left(\text{car } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos\alpha \neq 1\right) \\
&= \boldsymbol{\ell} \times \frac{1-(\cos\alpha)^n}{1-\cos\alpha} \times \sin\alpha \\
&= \boldsymbol{\ell} \times \frac{1-\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha} \times \sin\alpha
\end{aligned}$$

4°) Pour tout entier naturel *n*, on note w_n l'aire du triangle $\mathrm{O\,A}_n\mathrm{B}_n$.
Exprimer w_n en fonction de *n*, α et ℓ.

1ère méthode :

On utilise la formule donnant l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de deux côtés et de l'angle qu'ils forment.

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{1}{2} \times \mathrm{OA}_n \times \mathrm{OB}_n \times \sin \widehat{\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n} \\
&= \frac{1}{2} \times u_n \times u_n \times \sin 2\alpha \\
&= \frac{1}{2} \times (u_n)^2 \times \sin 2\alpha \\
&= \frac{1}{2} \times (\boldsymbol{\ell} \times \cos^n\alpha)^2 \times \sin 2\alpha \\
&= \frac{1}{2} \times \boldsymbol{\ell}^2 \times \cos^{2n}\alpha \times \sin 2\alpha
\end{aligned}$$

2e méthode :

Le triangle $\mathrm{O\,A}_n\mathrm{B}_n$ est isocèle en O.

Or A_{n+1} est le milieu du segment $[\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n]$ donc c'est aussi le pied de la hauteur issue de O.

On peut donc écrire $w_n = \dfrac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n \times \mathrm{OA}_{n+1}}{2}$.

Comme A_{n+1} est le milieu du segment $[\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n]$, $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n = 2\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = 2v_n$.

$$w_n = \frac{2v_n \times u_{n+1}}{2}$$

$$= v_n \times u_{n+1}$$

$$= u_n \times \sin\alpha \times \boldsymbol{\ell} \times (\cos\alpha)^{n+1}$$

$$= \boldsymbol{\ell} \times (\cos\alpha)^n \times \sin\alpha \times \boldsymbol{\ell} \times (\cos\alpha)^{n+1}$$

$$= \boldsymbol{\ell}^2 \times (\cos\alpha)^{2n+1} \times \sin\alpha$$

$$= \boldsymbol{\ell}^2 \times \cos^{2n+1}\alpha \times \sin\alpha$$

Remarque :

La formule de duplication $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ permet de voir que la formule obtenue par la 1ère méthode correspond bien à la formule obtenue par la deuxième méthode.

IV.

Une compagnie de transport, dont la clientèle est composée d'usagers réguliers effectuant 40 trajets par mois (un le matin, un le soir sur 20 jours), étudie un projet offrant à ses usagers le choix entre :
- un titre de transport de 60 € pour l'ensemble des trajets mensuels ;
- pour les voyageurs ne voulant pas se procurer le titre de transport, le paiement d'une taxe de M € en cas de contrôle.

La compagnie prévoit d'organiser les contrôles de façon que la probabilité d'un tel contrôle soit pour chaque trajet égale à $\frac{1}{10}$, avec indépendance d'un trajet par rapport à l'autre.

On considère un usager régulier. On note X la variable aléatoire qui compte pour cet usager le nombre de trajets où il est contrôlé pendant un mois.

1°) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
Calculer le nombre moyen de trajets contrôlés c'est-à-dire l'espérance mathématique de X.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{10}$.

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 40 \times \frac{1}{10} = 4$

2°) Quel sera, en fonction de M, le coût moyen mensuel en euros des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport ?
En déduire la valeur M pour laquelle, en moyenne, les deux choix proposés aux usagers sont financièrement équivalents pour la compagnie.

Soit Y la variable aléatoire qui à compte le coût mensuel en euros des trajets pour un usager qui ne se procure pas le titre de transport.

On a $\mathrm{Y} = \mathrm{MX}$ donc $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \mathrm{ME}(\mathrm{X})$ soit $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 4\mathrm{M}$.

Le coût moyen mensuel des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport sera de 4M €.

Les deux choix proposés aux usagers sont financièrement équivalents pour la compagnie pour $\mathrm{M} = 15$ (valeur telle que $4\mathrm{M} = 60$).

3°) Calculer la probabilité que l'usager ait au moins 5 contrôles durant le mois. On donnera la valeur arrondie au millième.

On cherche $P(\mathrm{X} \geqslant 5)$.

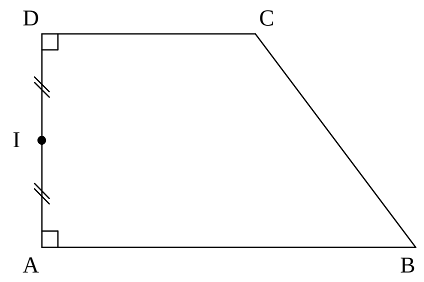
Afin d'utiliser la calculatrice, on écrit $P(\mathrm{X} \geqslant 5) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 4)$.

On trouve $P(\mathrm{X} \geqslant 5) = 0{,}370982300...$.

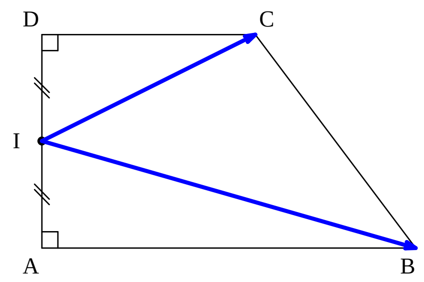
La valeur arrondie au millième de la probabilité que l'usager ait au moins 5 contrôles durant le mois est 0,371.

V.

Soit ABCD un trapèze non croisé de bases $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ tel que les angles $\widehat{\mathrm{BAD}}$ et $\widehat{\mathrm{CDA}}$ soient droits.
On note I le milieu du segment $[\mathrm{AD}]$.
On pose $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{CD} = b$ et $\mathrm{AD} = c$.



1°) En décomposant convenablement les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IC}}$, calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\mathrm{IB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}}$ en fonction de a, b, c.



$p = \overrightarrow{\mathrm{IB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}}$

$= \left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{ID}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)$

$= \overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ID}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ID}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$= -\frac{c}{2} \times \frac{c}{2} + 0 + 0 + a \times b$ (les 0 correspondent à des produits scalaires de vecteurs orthogonaux ; les autres produits scalaires se calculent par la propriété du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires)

$= ab - \frac{c^2}{4}$

2°) Démontrer que l'angle $\widehat{\mathrm{BIC}}$ est droit si et seulement si $c^2 = 4ab$.

$\widehat{\mathrm{BIC}}$ est droit $\Leftrightarrow p = 0$

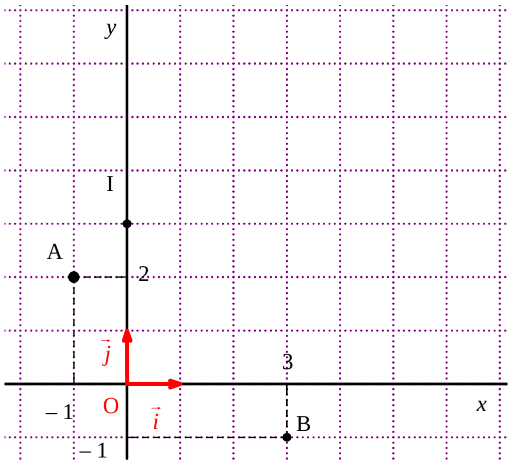
$\Leftrightarrow ab - \frac{c^2}{4} = 0$

$\Leftrightarrow c^2 = 4ab$

VI.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(-1\,;2)$ et $\mathrm{B}(3\,;-1)$.
Les questions sont indépendantes.

1°) On note I le point de l'axe des ordonnées tel que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1$.
a) Calculer l'ordonnée de I.



I appartient à l'axe des ordonnées donc $x_{\mathrm{I}} = 0$.
On sait que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1 \times 4 + (y_{\mathrm{I}} - 2) \times (-3) = 1$ (on utilise l'expression analytique du produit scalaire en repère orthonormé)

$\Leftrightarrow 4 - 3y_{\mathrm{I}} + 6 = 1$

$\Leftrightarrow 3y_{\mathrm{I}} = 9$

$\Leftrightarrow y_{\mathrm{I}} = 3$

I a pour ordonnée 3.

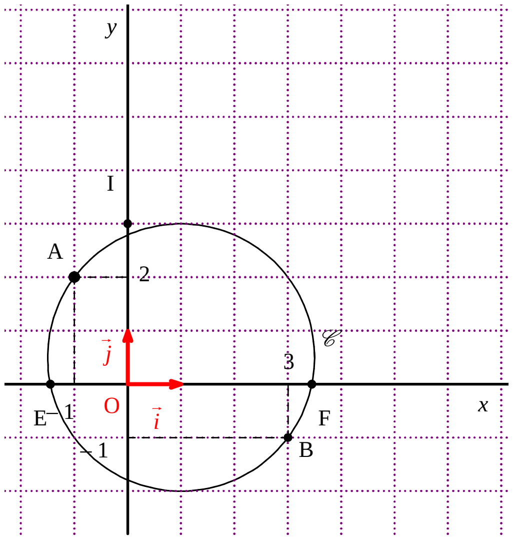
b) Calculer $\cos\widehat{\mathrm{BAI}}$ (valeur exacte).

On a $\mathrm{AI} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\mathrm{AB} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1$ d'après la question a).

On peut donc écrire $\mathrm{AI} \times \mathrm{AB} \times \cos\widehat{\mathrm{BAI}} = 1$ ce qui donne $\sqrt{2} \times 5 \times \cos\widehat{\mathrm{BAI}} = 1$ donc $\cos\widehat{\mathrm{BAI}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

2°) On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$.
Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.



Soit M un point quelconque de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ (ligne sans coordonnées, faire un graphique pour comprendre)

$\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = 0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow (x+1)\times(x-3)+(y-2)\times(y+1)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-y-5=0$

$\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2-2x-y-5=0$.
Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $x^2-2x-5=0$ (1).

Les solutions de (1) sont $1+\sqrt{6}$ et $1-\sqrt{6}$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont donc $1+\sqrt{6}$ et $1-\sqrt{6}$.

3°) Pour tout réel m on note D_m et D_m' les droites d'équations cartésiennes respectives $(m+1)x+(m-3)y+2=0$ et $(m-1)x+(m+3)y-2=0$.
Pour quelles valeurs de m les droites D_m et D_m' sont-elles perpendiculaires ?

Le vecteur $\vec{u}\,(-m+3\,;\,m+1)$ est un vecteur directeur de D_m.

Le vecteur $\vec{u}'\,(-m-3\,;\,m-1)$ est un vecteur directeur de D_m'.

$D_m \perp D_m' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

$\Leftrightarrow (-m+3)(-m-3)+(m+1)(m-1)=0$

$\Leftrightarrow (-m)^2-3^2+m^2-1^2=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-9-1=0$

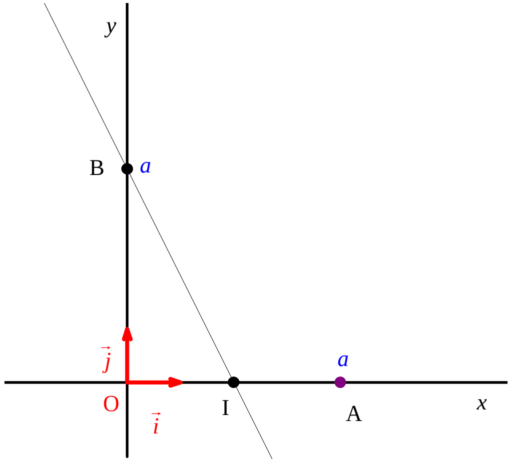
$\Leftrightarrow 2m^2-10=0$

$\Leftrightarrow m^2=5$

$\Leftrightarrow m=\sqrt{5}$ ou $m=-\sqrt{5}$

VII.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(a\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;a)$ où a est un réel strictement positif.
On note I le milieu de $[\mathrm{OA}]$.



1°) En utilisant les coordonnées, calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BI}}$ en fonction de a.

I est le milieu de $[\mathrm{OA}]$ donc I a pour coordonnées $\left(\dfrac{a}{2}\,;0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ a pour coordonnées $(a\,;-a)$.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{a}{2}\,;-a\right)$.

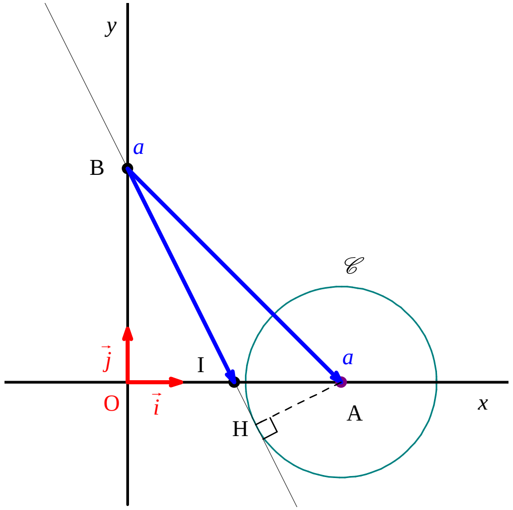
D'après l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormé,

$$p = a\times\frac{a}{2}+(-a)^2$$

$$= \frac{a^2}{2}+a^2$$

$$= \frac{3a^2}{2}$$

2°) Pour cette question, il est demandé de ne pas calculer les coordonnées de H.
On note H le projeté orthogonal de A sur (BI).
À l'aide de p, calculer BH en fonction de a. En déduire AH en fonction de a.



Comme H est le projeté orthogonal de A sur (BI), on a $p=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BI}}$.

On va procéder par une équation.

Or $p>0$ d'après la question précédente donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ sont colinéaires de même sens et par suite, $p=\mathrm{BH}\times\mathrm{BI}$.

On en déduit que $\mathrm{BH}=\dfrac{p}{\mathrm{BI}}$.

On calcule la distance BI grâce aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ que nous avons déterminées à la question 1°).

$$\mathrm{BI}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(-a)^2=\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{5a^2}{4}$$

On a donc $\mathrm{BI}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (car $a>0$ par hypothèse)

On a donc $\mathrm{BH}=\dfrac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on a $\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2\ (1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(-a\,;a)$.

Par conséquent, $\mathrm{AB}^2=(-a)^2+a^2=2a^2$.

(1) donne donc $\mathrm{AH}^2=2a^2-\dfrac{9a^2}{5}=\dfrac{a^2}{5}$.

Comme $a>0$ par hypothèse, on peut écrire que $\mathrm{AH}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

3°) Déterminer, en rédigeant correctement, une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A tangent à (BI).

$\mathscr{C}$ a pour centre A et pour rayon AH.

Soit M un point quelconque de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M}\in\mathscr{C}\Leftrightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{AH}$ (ligne sans coordonnées, faire un graphique pour comprendre)

$\Leftrightarrow \mathrm{AM}^2=\mathrm{AH}^2$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow (x-a)^2+y^2=\dfrac{a^2}{5}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax+a^2-\dfrac{a^2}{5}=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax+\dfrac{4a^2}{5}=0$

$\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2-2ax+\dfrac{4a^2}{5}=0$.