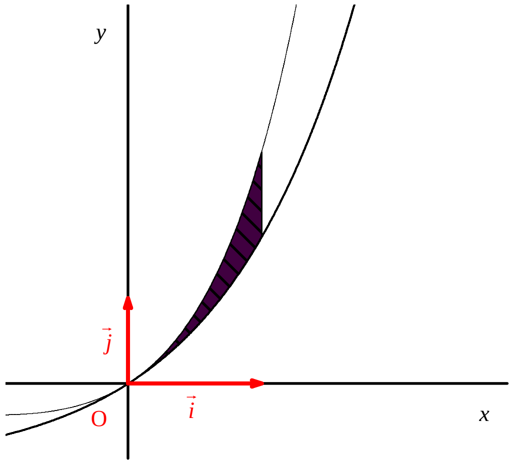
TS1

Contrôle du mardi 15 mai 2018 (2 heures)

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y = x\text{e}^x$ et $y = \text{e}^x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) On rappelle que pour tout réel u, on a $\text{e}^u \geqslant 1 + u$.
En appliquant cette inégalité à $-x$, démontrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ.

2°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et Γ sur l'intervalle $[0\,;1]$. On attend la valeur exacte.
On commencera par calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\text{e}^x$.

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

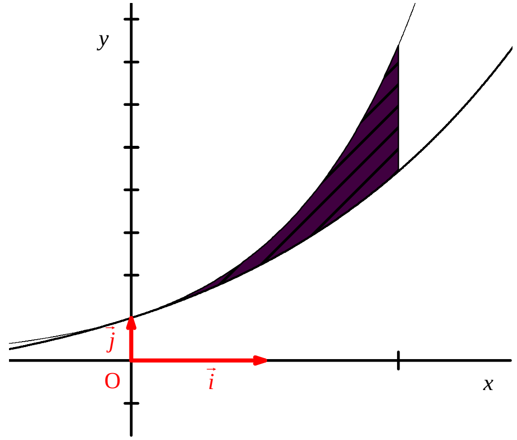
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(1+x)(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que la fonction $\text{F} : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{x-x^2}{x^2+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y = \text{e}^x$ et $y = 2\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ.

2°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et Γ sur l'intervalle $[0\,;2]$. On attend la valeur exacte.

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\text{F}(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\text{e}^t}{t}\,\text{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Déterminer, en justifiant avec soin, le sens de variation de F sur $]0\,;+\infty[$.

2°) Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $\dfrac{\text{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{\text{e}}{t}$. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $\text{F}(x) \geqslant \text{e}\ln x$.

3°) À l'aide de l'inégalité obtenue, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{F}(x)$.

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\text{A}(2\,;-3\,;1)$, $\text{B}(0\,;1\,;5)$, $\text{C}(-4\,;5\,;7)$.

1°) Donner sans justifier un système d'équation paramétriques de la droite D passant par C et parallèle à (AB).

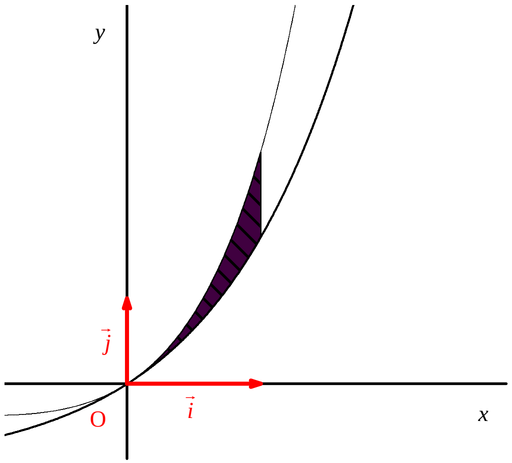
2°) On note P le plan passant par A parallèle à $(x\text{O}z)$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de la droite D avec le plan P.

3°) Donner sans justifier un système d'équations paramétriques du plan Q passant par O et contenant D.

Corrigé du contrôle du 15-5-2018

I.

On note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y = x\mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) On rappelle que pour tout réel u, on a $\mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$.
En appliquant cette inégalité à $-x$, démontrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ.

Soit x un réel quelconque.

On sait que $\forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$ donc en appliquant cette inégalité à $-x$ on obtient : $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x \quad (1)$.

(1) donne successivement :

$\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \geqslant 1 - x$

$1 \geqslant (1-x)\mathrm{e}^x \quad$ (car $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > 0$)

$1 \geqslant \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$

$x\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^x - 1$

Or $\mathcal{C}$ a pour équation $y = x\mathrm{e}^x$ et Γ a pour équation $y = \mathrm{e}^x - 1$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ.

2°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et Γ sur l'intervalle $[0\,;1]$. On attend la valeur exacte.
On commencera par calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\mathrm{e}^x$.

Méthode : On commence par exprimer l'aire $\mathcal{A}$ sous la forme d'une seule intégrale.

D'après la question 1°), $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ donc $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 \left[x\mathrm{e}^x - \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\right] \, \mathrm{d}x$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1\right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left[(x-1)\mathrm{e}^x + 1\right] \, \mathrm{d}x$$

On calcule la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\mathrm{e}^x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-2) \times \mathrm{e}^x$$

$$= \mathrm{e}^x + (x-2) \times \mathrm{e}^x$$

$$= \left[1 + (x-2)\right] \times \mathrm{e}^x$$

$$= (x-1) \times \mathrm{e}^x$$

On reprend le calcul de l'aire.

$$\mathcal{A} = \left[f(x) + x\right]_0^1$$

$$= \left[(x-2)\mathrm{e}^x + x\right]_0^1$$

$$= \left[(1-2)\mathrm{e}^1 + 1\right] - \left[(0-2)\mathrm{e}^0 + 0\right]$$

$$= -\mathrm{e} + 1 + 2$$

$$= 3 - \mathrm{e} \text{ u. a.}$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(1+x)(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que la fonction F : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{x-x^2}{x^2+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}+\frac{(1-2x)\times\left(x^2+1\right)-\left(x-x^2\right)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+\frac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x\times\left(x^2+1\right)-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^3+x-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^3-x^2-x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(x-1)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(1+x)(1-x)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=f(x)$$

Comme $\mathrm{F}'=f$, on en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{F}(x)\right]_0^1$$

$$=\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)$$

$$\mathrm{F}(0)=\frac{1}{2}\ln\left(0^2+1\right)+\frac{0-0^2}{0^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1$$

$$=0$$

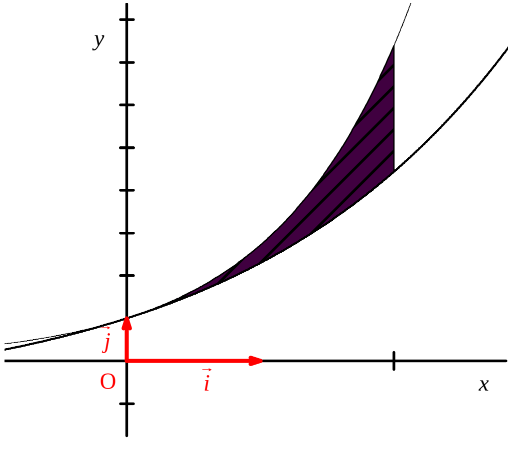
$$\mathrm{F}(1)=\frac{1}{2}\ln\left(1^2+1\right)+\frac{1-1^2}{1^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2$.

III.

On note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y=\mathrm{e}^x$ et $y=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.



1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ.

Pour tout réel x, on pose $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\left(2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\right)=\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \varphi(x)=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1$$

$$=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$$

Un carré est toujours positif ou nul donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad \varphi(x)\geqslant 0$.

Ainsi, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ.

2°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et Γ sur l'intervalle $[0\,;2]$. On attend la valeur exacte.

D'après la question 1°), $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ donc $\mathcal{A}=\int_1^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathcal{A}=\int_1^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left(\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\mathrm{e}^x-4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1\right]_0^2$$

$$=\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+2-\left(\mathrm{e}^0-4\right)$$

$$=\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+2+3$$

$$=\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+5\ \text{u. a.}$$

IV.

On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Déterminer, en justifiant avec soin, le sens de variation de F sur $]0\,;+\infty[$.

F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad \mathrm{F}'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On observe immédiatement que $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad \mathrm{F}'(x)>0$.

On en déduit que F est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2°) Démontrer que pour tout réel $t\geqslant 1$, on a $\frac{\mathrm{e}^t}{t}\geqslant\frac{\mathrm{e}}{t}$. En déduire que pour tout réel $x\geqslant 1$, on a $\mathrm{F}(x)\geqslant \mathrm{e}\ln x$.

Soit t un réel quelconque supérieur ou égal à 1.

On a $\mathrm{e}^t\geqslant\mathrm{e}$.

Comme $t\geqslant 1$, $t>0$. On peut donc diviser les deux membres par t sans changer le sens de l'inégalité.

On obtient $\frac{\mathrm{e}^t}{t}\geqslant\frac{\mathrm{e}}{t}$.

Ainsi $\forall t\in[1\,;+\infty[\quad \frac{\mathrm{e}^t}{t}\geqslant\frac{\mathrm{e}}{t}$.

On fixe un réel quelconque x supérieur ou égal à 1.

Comme $1\leqslant x$, d'après le résultat établi précédemment $\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_1^x\frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t$ soit $\mathrm{F}(x)\geqslant\int_1^x\frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t$.

On calcule $\int_1^x\frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Par linéarité de l'intégrale, on a $\int_1^x\frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=\mathrm{e}\left[\ln t\right]_1^x=\mathrm{e}\ln x$.

Ainsi $\mathrm{F}(x)\geqslant\mathrm{e}\ln x$.

3°) À l'aide de l'inégalité obtenue, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$.

Ainsi $\forall x\in[1\,;+\infty[\quad \mathrm{F}(x)\geqslant\mathrm{e}\ln x$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}\ln x)=+\infty$ donc d'après le théorème « d'un seul gendarme », $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)=+\infty$.

V.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(2\,;-3\,;1)$, $\mathrm{B}(0\,;1\,;5)$, $\mathrm{C}(-4\,;5\,;7)$.

1°) Donner sans justifier un système d'équation paramétriques de la droite *D* passant par C et parallèle à (AB).

$$\begin{cases} x = -2\lambda - 4 \\ y = 4\lambda + 5 \\ z = 4\lambda + 7 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2°) On note *P* le plan passant par A parallèle à $(x\mathrm{O}z)$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de la droite *D* avec le plan *P*.

Le plan *P* est parallèle à $(x\mathrm{O}z)$. Comme *P* passe par A, *P* a pour équation $y = -3$.

Le paramètre λ de E sur la droite *D* vérifie $4\lambda + 5 = -3$.

On a donc $\lambda = -2$.

Ainsi E a pour coordonnées $(0\,;-3\,;-1)$.

3°) Donner sans justifier un système d'équations paramétriques du plan *Q* passant par O et contenant *D*.

Le plan *Q* contient les points O, C, E qui ne sont pas alignés ; $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)$ est donc un repère de *Q*.

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\,(-4\,;5\,;7)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,(0\,;-3\,;-1)$

Q admet donc pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 5\lambda - 3\lambda' \\ z = 7\lambda - \lambda' \end{cases} \quad \left((\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2\right)$.