TS1

Contrôle du lundi 7 mai 2018 (50 minutes) non donné

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (6 points : 1°) 4 points ; 2°) 2 points)

1°) Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer $I(a)=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$.

On attend tout le détail de la démarche et l'on donnera le résultat en fonction de $\ln a$ uniquement.

Indication :

Écrire $|\ln x|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x ($x>0$).

Écrire $I(a)=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{a}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$.

2°) Calculer la valeur exacte de $J=\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{\left|\ln\left(x^2\right)\right|}{x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant le résultat du 1°).

II. (6 points : 3 points + 3 points)

Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 3x\ \mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\cos 3x+2}\ \mathrm{d}x$.

Indication pour le calcul de *I* : Linéariser $\cos^2 3x$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Calculer $\mathrm{F}'(x)$.

$\forall x\in\,]0\,;+\infty[$ …………………… (une seule égalité)

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\mathrm{F}(2)$.

………….. (un seul résultat sans égalité)

IV. (4 points)

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.
On note *t* le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant *t* est donnée par la fonction *f* définie, pour tout réel *t* positif ou nul, par $f(t)=980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20$.
Calculer la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement.
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 7-5-2018

I.

1°) Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer $I(a)=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$.

On attend tout le détail de la démarche et l'on donnera le résultat en fonction de $\ln a$ uniquement.

Indication :

Écrire $|\ln x|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x ($x>0$).

Écrire $I(a)=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{a}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$.

Si $0<x\leqslant 1$, $\ln x\leqslant 0$ donc $|\ln x|=-\ln x$.

Si $x\geqslant 1$, $\ln x\geqslant 0$ donc $|\ln x|=\ln x$.

On commence par observer que comme $a>1$, $\dfrac{1}{a}<1$.

$$I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{a}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{-\ln x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{a}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$ (car l'intervalle $\left[\dfrac{1}{a}\,;1\right]$ est inclus dans l'intervalle $]0\,;1]$ et l'intervalle $[1\,;a]$ est inclus dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$)

$$=-\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{a}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{a}}^{1}+\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{a}$$

$$=-\left[\frac{(\ln 1)^2}{2}-\frac{\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2}{2}\right]+\left[\frac{(\ln a)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}\right]$$

$$=-\left[\frac{0}{2}-\frac{(-\ln a)^2}{2}\right]+\left[\frac{(\ln a)^2}{2}-\frac{0}{2}\right]$$

$$=-\left[-\frac{(\ln a)^2}{2}\right]+\frac{(\ln a)^2}{2}$$

$$=(\ln a)^2$$

2°) Calculer la valeur exacte de $J=\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{\left|\ln\left(x^2\right)\right|}{x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant le résultat du 1°).

$$J=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{\left|\ln\left(x^2\right)\right|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{|2\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{2|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=2I(3)$$

$$=2(\ln 3)^2$$

La calculatrice permet de contrôler ce résultat.

II.

Calculer $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 3x\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\cos 3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Indication pour le calcul de *I* : Linéariser $\cos^2 3x$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 3x\ \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 6x}{2}\ \mathrm{d}x \quad (\text{formule } \cos^2 X=\frac{1+\cos 2X}{2})$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 6x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\left(6\times\frac{\pi}{2}\right)}{6}\right)-\left(0+\frac{\sin(6\times 0)}{6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 3\pi}{6}\right)-\frac{\sin 0}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{0}{6}\right)-\frac{0}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\cos 3x+2}\ \mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\ln\left|\cos 3x+2\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\ln(\cos 3x+2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\ln\left(\cos\frac{3\pi}{2}+2\right)-\ln(\cos 0+2)\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\ln(0+2)-\ln(1+2)\right]$$

$$=-\frac{1}{3}(\ln 2-\ln 3)$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$$

III.

On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Calculer $\mathrm{F}'(x)$.

$\forall x\in\,]0\,;+\infty[\qquad \mathrm{F}'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ (une seule égalité)

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\mathrm{F}(2)$.

2,020 (un seul résultat sans égalité)

IV.

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.
On note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout réel t positif ou nul, par $f(t)=980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20$.
Calculer la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement.
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

On applique la définition de la valeur moyenne d'une fonction.
Il faut calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;15]$.

$$\theta=\frac{1}{15}\int_0^{15}f(t)\ \mathrm{d}t$$

On pose $a=\int_0^{15}f(t)\ \mathrm{d}t$.

$$a=\int_0^{15}\left(980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left[-4900\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20t\right]_0^{15}$$ (une primitive de la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$ est la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{-\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}=-5\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$)

$$=\left(-4900\mathrm{e}^{-\frac{15}{5}}+20\times 15\right)-\left(-4900\mathrm{e}^{-\frac{0}{5}}+20\times 0\right)$$

$$=\left(-4900\mathrm{e}^{-3}+300\right)-\left(-4900\right)$$

$$=4900-4900\mathrm{e}^{-3}+300$$

$$=4900\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)+300$$

On a donc $\theta=\dfrac{980}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)+20$.

Avec la calculatrice, on obtient l'affichage suivant : 330,402891.

La valeur de θ arrondie au dixième est 330,4.

La température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement est environ égale à 330,4 °C.