TS1

Contrôle du vendredi 6 avril 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………..……………

Note : ……. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^{2x}+e^{x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

……..

……..

……..

……..

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………….. (une seule égalité)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3e^{2x}-e^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

1°) Donner l'expression de F.

…………………………… (une seule égalité)

2°) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(\ln x)$.

Exprimer $\mathrm{G}(x)$ en fonction de x ($x>0$) sous la forme la plus simple possible.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathrm{G}(x)=$ ....

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

……………………………………………….. (une seule égalité)

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\left]1\,;+\infty\right[$.

……………………………………………….. (une seule égalité)

IV. (2 points)

Soit F et G deux primitives d'une fonction *f* sur $\mathbb{R}$. On sait que $F(1)=3$, $G(1)=5$ et $F(2)=4$.

Calculer $G(2)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

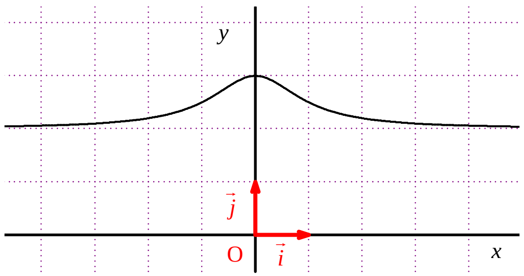
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (1 point)

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une autre primitive G de *f* sur $\mathbb{R}$.



Donner sans explication l'expression de $G(x)$. On pourra s'intéresser à la valeur de F et de G en 0.

………………………………………………….. (une seule égalité)

VI. (2 points)

Soit *a* un réel strictement négatif. Déterminer un argument du nombre complexe $z=\mathrm{i}a$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit θ un réel quelconque. On pose $z=\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta$.

1°) Vérifier que $z=-\mathrm{i}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) En déduire une écriture exponentielle de *z*.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 6-4-2018

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^{2x}+e^{x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

On pose $g(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ pour tout réel x.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=\frac{1}{e^{x}}-\frac{e^{x}\times e^{-x}}{e^{x}\times\left(e^{-x}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{1+e^{x}}$$

$$=\frac{1\cancel{+e^{x}}\ \cancel{-e^{x}}}{e^{x}\left(1+e^{x}\right)}$$

$$=f(x)$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{F}(x)=-e^{-x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)\ \text{(une seule égalité)}$$

Les barres de valeur absolue qu'il devrait y avoir n'ont pas lieu d'être puisque la quantité « dans » le ln est strictement positive.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3e^{2x}-e^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

1°) Donner l'expression de F.

$$\mathrm{F}(x)=\frac{3}{2}e^{2x}-e^{x}-\frac{1}{2}\ \text{(une seule égalité)}$$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto \dfrac{3}{2}e^{2x}-e^{x}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Pour déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 (c'est-à-dire $\mathrm{F}(0)=0$), on cherche k tel que $\dfrac{3}{2}e^{2\times 0}-e^{0}+k=0$.

On obtient $\dfrac{1}{2}+k=0$ ce qui donne $k=-\dfrac{1}{2}$.

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est donc la fonction $\mathrm{F} : x\mapsto \dfrac{3}{2}e^{2x}-e^{x}-\dfrac{1}{2}$.

2°) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(\ln x)$.

Exprimer $\mathrm{G}(x)$ en fonction de x ($x>0$) sous la forme la plus simple possible.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \mathrm{G}(x)=\frac{3}{2}x^{2}-x-\frac{1}{2}\ \text{(une seule égalité)}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \mathrm{G}(x)=\frac{3}{2}e^{2\ln x}-e^{\ln x}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\left(e^{\ln x}\right)^{2}-e^{\ln x}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}x^{2}-x-\frac{1}{2}$$

III.

1°) On considère la fonction $f : x\mapsto \dfrac{x^{2}-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$.

$$\mathrm{F}(x)=\frac{x^{2}}{2}-\ln x\ \text{(une seule égalité)}$$

On utilise la réécriture $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ valable pour tout réel $x\neq 0$.

2°) On considère la fonction $g : x\mapsto \dfrac{x}{x^{2}-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $]1\,;+\infty[$.

$$\forall x\in\,]1\,;+\infty[\quad \mathrm{G}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}-1\right)$$

On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$. On écrit $g(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^{2}-1}$.

On a enlevé les barres de valeur absolue car, pour $x>1$, la quantité $x^{2}-1$ est strictement positive.

On peut aussi écrire $\forall x\in\,]1\,;+\infty[\quad \mathrm{G}(x)=\ln\sqrt{x^{2}-1}$.

IV.

Soit F et G deux primitives d'une fonction f sur $\mathbb{R}$. On sait que $F(1)=3$, $G(1)=5$ et $F(2)=4$.

Calculer $G(2)$.

Comme F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur $\mathbb{R}$, on sait, d'après une propriété du cours, qu'elles diffèrent d'une constante. Autrement dit, il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x)=F(x)+k$.

En prenant $x=1$ dans cette égalité, comme $F(1)=3$ et $G(1)=5$ par hypothèse, on a $5=3+k$ donc $k=-2$.

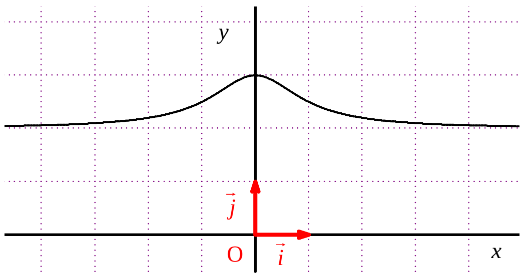
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x)=F(x)+2$.

En prenant $x=2$, on obtient $G(2)=F(2)+2=4+2=6$.

V.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une autre primitive G de f sur $\mathbb{R}$.



Donner sans explication l'expression de $G(x)$. On pourra s'intéresser à la valeur de F et de G en 0.

$$G(x)=\frac{1}{x^2+1}+2 \text{ (une seule égalité)}$$

Comme F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur $\mathbb{R}$, on sait, d'après une propriété du cours, qu'elles diffèrent d'une constante. Autrement dit, il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x)=F(x)+k$.

Pour $x=0$, cette égalité donne $G(0)=F(0)+k$.

Or $F(0)=\dfrac{1}{1+0^2}=1$.

On a donc $3=1+k$ ce qui donne finalement $k=2$. On obtient donc $G(x)=F(x)+2$ soit $G(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+2$.

VI.

Soit a un réel strictement négatif. Déterminer un argument du nombre complexe $z=\mathrm{i}a$.

1ère méthode :

$\arg z = \arg(\mathrm{i}a) \quad (2\pi)$

$\arg z = \arg \mathrm{i} + \arg a \quad (2\pi)$ [propriété sur les arguments]

$\arg z = \dfrac{\pi}{2} - \pi \quad (2\pi)$ [$\arg a = -\pi$ car a est un réel strictement négatif par hypothèse]

$\arg z = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

2e méthode :

L'image de z dans le plan complexe appartient à la demi-droite définie par $\operatorname{Re} z = 0$ et $\operatorname{Im} z < 0$.

On a donc $\arg z = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

3e méthode :

On a $z=(-a)\times(-\mathrm{i})$. Or $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ donc $z=(-a)\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

Comme a est un réel strictement négatif par hypothèse, $-a$ est un réel strictement positif.

On a donc obtenu une écriture exponentielle de z et l'on en déduit que $\arg z = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

VII.

Soit θ un réel quelconque. On pose $z=\sin\theta - \mathrm{i}\cos\theta$.

1°) Vérifier que $z=-\mathrm{i}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) &= -\mathrm{i}\cos\theta+\sin\theta \\ &= z \end{aligned}$$

2°) En déduire une écriture exponentielle de z.

On utilise l'égalité $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

En reprenant l'égalité du 1°), on peut écrire $z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ce qui donne $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Cette dernière égalité donne une écriture exponentielle de z.