TS1

Contrôle du samedi 24 mars 2018 (2 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*. On donnera la réponse sans justifier.

2°) Donner sans justifier le tableau de variations de *f*.

3°) Compléter le tableau précédent avec les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.
On donnera uniquement le calcul de l'une des limites au choix.

4°) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 1$.

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \ln\left(x^2+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient sous la plus simple possible sans justifier.

2°) Recopier et compléter la phrase : « $f'(x)$ s'annule pour $x = \ldots$ ».
Dans un tableau récapitulatif, étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

3°) Le but de cette question est de déterminer la limite de *f* en $+\infty$.
Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x - 2\ln x$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Indication : Utiliser l'égalité $g(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$ pour tout réel $x > 0$.

b) Démontrer pour tout réel $x > 0$, $f(x) = g(x) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Compléter le tableau du 2°) avec cette limite ainsi qu'avec la limite de *f* en $-\infty$.

4°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer l' (les) abscisse(s) du (des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

III. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x \times \ln\dfrac{1}{x} \leqslant -1$ (1).

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Dans tout l'exercice, *a* désigne un réel non nul.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{x}$.
Le but de cette question est de déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Pour cela, on pose $X = ax$ ce qui est équivalent à $x = \dfrac{X}{a}$. On a donc $(x \to 0) \Leftrightarrow (X \to 0)$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de *X* puis achever la détermination de la limite.

2°) Dans cette question, on suppose que $a > 0$ et on considère la fonction $g : x \mapsto \ln\dfrac{\sin(ax)}{x}$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

À tout réel *m* on associe la fonction $f_m : x \mapsto m\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_m'(x)$.

2°) On suppose dans cette question que *m* est un réel strictement positif quelconque.

On note J_m le point d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de l'axe des abscisses.

a) Déterminer l'abscisse de J_m en fonction de *m*.

b) Déterminer une équation de la tangente T_m en J_m à $\mathcal{C}_m$.

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) Écrire $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$ sous forme exponentielle. Aucun détail de la démarche n'est attendu.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $z_n = \dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}$.

a) Déterminer un argument de z_n en fonction de *n*.

b) Déterminer pour quels entiers naturels *n* le nombre z_n est réel.
On attend une chaîne d'équivalences « $z_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ldots$ ».

Contrôle du 24-3-2018. Copie à remettre

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) …………………… (une seule réponse sans égalité)

2°)

3°) ………………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

4°) ………………………………………………… (une seule réponse, sans justifier)

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; 4°) 2 points)

1°) ..……………………………………………………………………………………………………..

2°) ..……………………………………………………………………………………………………..

3°) a) …………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

b) ………………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

4°) …………………………………………………………………………………………………...

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) …………………………………………………………… (une seule égalité quantifiée)

2°) a) ………………………………………………………………………………………………

………

………

………

b) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………. (deux égalités sur la même ligne)

2°) a) ………………………………………………………………………………………………

………

………

b) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 24-3-2018

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*. On donnera la réponse sans justifier.

$\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ ou $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

2°) Donner sans justifier le tableau de variations de *f*.

x	0			1		$+\infty$
Variations de f	‖ 0	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	0

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur les intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
De plus, elle a un signe constant sur chacun de ces intervalle donc *f* est strictement décroissante sur les intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

On vérifie grâce à la calculatrice graphique.

3°) Compléter le tableau précédent avec les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.
On donnera uniquement le calcul de l'une des limites au choix.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc par limite de l'inverse d'une fonction $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4°) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 1$.

On peut utiliser le tableau de variations pour donne l'ensemble de solutions de cette inéquation $S =]0\,;1[\cup]\mathrm{e}\,;+\infty[$.

On peut aussi mener la résolution grâce à un tableau de signes après avoir observé que l'inéquation est équivalente à $\dfrac{1-\ln x}{\ln x} < 0$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \ln\left(x^2+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient sous la plus simple possible sans justifier.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

2°) Recopier et compléter la phrase : « $f'(x)$ s'annule pour $x = \ldots$ ».
Dans un tableau récapitulatif, étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

$f'(x)$ s'annule pour $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$		↗		$+\infty$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3°) Le but de cette question est de déterminer la limite de *f* en $+\infty$.
Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x - 2\ln x$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Indication : Utiliser l'égalité $g(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$ pour tout réel $x > 0$.

On utilise la limite de référence $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ qui donne $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

b) Démontrer pour tout réel $x>0$, $f(x)=g(x)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x)=x-\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=x-\ln\left(x^2\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x-2\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=g(x)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0 \quad \text{(par limite d'une composée)}\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ par limite d'une différence.}$$

Par un calcul simple, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Compléter le tableau du 2°) avec cette limite ainsi qu'avec la limite de *f* en $-\infty$.

4°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer l' (les) abscisse(s) du (des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

On résout l'équation $f'(x)=\frac{1}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x+1\right)=x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3} \text{ ou } x=2-\sqrt{3}$$

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ sont $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$.

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x\times\ln\frac{1}{x}\leqslant -1$ (1).

L'ensemble de résolution de (1) est $\mathbb{R}_+^*$.

$$(1) \Leftrightarrow \ln x\times(-\ln x)\leqslant -1$$

$$\Leftrightarrow -(\ln x)^2\leqslant -1$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2\geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x\leqslant -1 \text{ ou } \ln x\geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow x\leqslant\frac{1}{\text{e}} \text{ ou } x\geqslant \text{e}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

On tient compte de l'ensemble de résolution.

$$S=\left]0\,;\frac{1}{\text{e}}\right]\cup\left[\text{e}\,;+\infty\right[$$

IV.

Dans tout l'exercice, a désigne un réel non nul.

1°) On considère la fonction $f: x\mapsto\frac{\sin(ax)}{x}$.

Le but de cette question est de déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pour cela, on pose $X=ax$ ce qui est équivalent à $x=\frac{X}{a}$. On a donc $(x\to 0)\Leftrightarrow(X\to 0)$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de X puis achever la détermination de la limite.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f(x)=\frac{\sin X}{\frac{X}{a}}=a\frac{\sin X}{X}$$

$\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{X\to 0}\left(a\frac{\sin X}{X}\right)=a$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a$.

2°) Dans cette question, on suppose que $a>0$ et on considère la fonction $g : x \mapsto \ln \dfrac{\sin(ax)}{x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin(ax)}{x}}_{Y} = a \quad \text{(résultat de la question précédente)} \\ \lim\limits_{Y \to a} \ln Y = \ln a \quad (\text{car } a>0) \end{array}\right\} \text{donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \ln a \text{ .}$$

V.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto m\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_m'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = m\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}$

2°) On suppose dans cette question que m est un réel strictement positif quelconque.

On note J_m le point d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de l'axe des abscisses.

a) Déterminer l'abscisse de J_m en fonction de m.

On résout l'équation $f_m(x) = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow m\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow m\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow m = \mathrm{e}^x$ (par simplification des deux membres par e^x qui est non nul)

$\Leftrightarrow \ln m = x$ (car $m>0$ par hypothèse)

J_m a pour abscisse $\ln m$.

b) Déterminer une équation de la tangente T_m en J_m à $\mathcal{C}_m$.

J_m a pour ordonnée 0.

Le coefficient directeur de T_m est donné par $f_m'(\ln m)$.

$$\begin{aligned} f_m'(\ln m) &= m\mathrm{e}^{\ln m} - 2\mathrm{e}^{2\ln m} \\ &= m \times m - 2\left(\mathrm{e}^{\ln m}\right)^2 \\ &= m^2 - 2m^2 \\ &= -m^2 \end{aligned}$$

T_m a donc pour équation $y = -m^2(x - \ln m)$ soit $y = m^2 \ln m - m^2 x$.

VI.

1°) Écrire $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$ sous forme exponentielle. Aucun détail de la démarche n'est attendu.

$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = \dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}$.

a) Déterminer un argument de z_n en fonction de n.

1ère méthode :

On écrit z_n sous forme exponentielle en utilisant les résultats du 1°).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{4}\right)}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}$$

On a obtenu une écriture exponentielle de z_n qui permet d'écrire $\arg z_n = \dfrac{(n+1)\pi}{4} \quad (2\pi)$.

2[e] méthode : On utilise les propriétés des arguments.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \arg z_n = \arg(1+\mathrm{i}) - \arg\left[(1-\mathrm{i})^n\right]$

$\arg z_n = \arg(1+\mathrm{i}) - n\arg(1-\mathrm{i})$

$\arg z_n = \dfrac{\pi}{4} - n\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\arg z_n = \dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{4}$

$\arg z_n = \dfrac{(n+1)\pi}{4}$

b) Déterminer pour quels entiers naturels n le nombre z_n est réel.

On attend une chaîne d'équivalences « $z_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ldots$ ».

On peut d'abord observer que le nombre z_n est non nul.

$z_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z_n = 0 \quad (\pi)$

$\Leftrightarrow \arg z_n = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)\pi}{4} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+1}{4} = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 4k-1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Les entiers naturels n tels que $z_n \in \mathbb{R}$ sont les entiers de la forme $4k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.