TS1

Contrôle du vendredi 16 mars 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : …….. / 20

I. (2 points)

Soit a et b deux réels strictement positifs quelconques.

Déterminer l'expression la plus simple possible sous la forme d'un seul logarithme de $\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\ln b$.

……

……

……

……

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x\times\ln\frac{1}{x}=-1$ (1).

On commencera par indiquer sans justifier l'ensemble de résolution de (1).

……

……

……

……

……

……

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln 2x>\ln\left(x^2-1\right)$ (2).

On commencera par indiquer sans justifier l'ensemble de résolution de (2).

……

……

……

……

……

……

III. (3 points)

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^{n+1}}<10^{-2018}$ (1).

Indication : On commencera par réduire le premier membre.

……

……

……

……

……

……

IV. (2 points)

On considère les fonctions $f : x\mapsto \mathrm{e}^{2x}+1$ et $g : x\mapsto \ln x$.

On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h=f\circ g$).

Exprimer $h(x)$ en fonction de x ($x>0$) sous la forme la plus simple possible.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $\quad h(x)=$ ………………………….

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans chaque question, on donne une fonction. Le modèle de résolution est donné pour chaque question.
Il est demandé de recopier celui-ci soigneusement en le complétant sur les lignes qui suivent.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{1+e^x}_{X}\right) = \text{.........} \\ \lim\limits_{X \to \ldots} \ln X = \text{..........} \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \text{.....} \, .$$

……

……

……

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto e^{-\frac{\sin x}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{X} = \text{.........} \quad \text{(limite de référence)} \\ \lim\limits_{X \to \ldots} \text{....} = \text{..........} \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \text{.....} \, .$$

……

……

……

VI. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x e^{\frac{x}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Le but de cette question est de déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Recopier et compléter la phrase suivante :

En $-\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « …… ».

……

On pose : $X = \frac{x}{2}$ ce qui est équivalent à $2X = x$.

On a $(x \to -\infty) \Leftrightarrow (X \to -\infty)$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de X puis achever la détermination de la limite.

……

……

……

……

……

……

2°) Démontrer que la fonction $\text{F} : x \mapsto (2x-4)e^{\frac{x}{2}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.
On pourra se contenter des grandes étapes de calcul. On fera très attention à la rédaction et aux notations.

……

……

……

……

……

……

VII. (2 points : 1 point + 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+e^{-x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \text{..}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = \text{..}$

Corrigé du contrôle du 16-3-2018

I.

Soit a et b deux réels strictement positifs quelconques.

Déterminer l'expression la plus simple possible sous la forme d'un seul logarithme de $\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\ln b$.

1[ère] méthode :

$$\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\ln b=\ln a+\ln\frac{a+b}{ab}+\ln b \quad \text{(la mise au même dénominateur de } \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \text{ donne } \frac{a+b}{ab}\text{)}$$

$$=\ln a+\ln(a+b)-\ln(ab)+\ln b$$

$$=\cancel{\ln a}+\ln(a+b)\cancel{-\ln a}\cancel{-\ln b}\cancel{+\ln b}$$

$$=\ln(a+b)$$

On ne peut pas simplifier davantage.

2[e] méthode :

$$\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\ln b=\ln\left(a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)b\right)$$

$$=\ln\left(ab\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)$$

$$=\ln(b+a)$$

$$=\ln(a+b)$$

II.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x\times\ln\frac{1}{x}=-1$ (1).

On commencera par indiquer sans justifier l'ensemble de résolution de (1).

L'ensemble de résolution de (1) est $\mathbb{R}_+^*$.

$$(1) \Leftrightarrow \ln x\times(-\ln x)=-1$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \ln x=1 \text{ ou } \ln x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=\mathrm{e} \text{ ou } x=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1=\left\{\mathrm{e}\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln 2x>\ln\left(x^2-1\right)$ (2).

On commencera par indiquer sans justifier l'ensemble de résolution de (2).

L'ensemble de résolution de (2) est $]1\,;+\infty[$.

$$(2) \Leftrightarrow 2x>x^2-1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1<0$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2} \quad \text{(les racines du polynôme } x^2-2x-1 \text{ sont } 1-\sqrt{2} \text{ et } 1+\sqrt{2}\text{)}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\left]1\,;1+\sqrt{2}\right[$$

III.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^{n+1}}<10^{-2018}$ (1).

Indication : On commencera par réduire le premier membre.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{4}{4^{n+1}}+\dfrac{1}{4^{n+1}}<10^{-2018}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{4^{n+1}}<10^{-2018}$

$\Leftrightarrow 5\times 10^{2018}<4^{n+1}$

$\Leftrightarrow \ln\left(5\times 10^{2018}\right)<\ln 4^{n+1}$

$\Leftrightarrow \ln 5+2018\ln 10<(n+1)\ln 4$ (inégalité qui s'écrit aussi $(n+1)\ln 4>\ln 5+2018\ln 10$)

$\Leftrightarrow n+1>\dfrac{\ln 5+2018\ln 10}{\ln 4}$ (on ne change pas le sens de l'inégalité puisque $\ln 4>0$)

$\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln 5+2018\ln 10}{\ln 4}-1$

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{\ln 5+2018\ln 10}{\ln 4}-1=3351{,}98641...$.

Le plus petit entier naturel n vérifiant (1) est 3352.

N.B. : On peut aussi utiliser le logarithme décimal.

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}+1$ et $g : x \mapsto \ln x$.

On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h=f\circ g$).
Exprimer $h(x)$ en fonction de x ($x>0$) sous la forme la plus simple possible.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad h(x)=x^2+1$$

$h=f\circ g$ donc g est à l'intérieur de f.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad h(x)=f\left[g(x)\right]$

$=\mathrm{e}^{2\ln x}+1$

$=\left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^2+1$

$=x^2+1$

V.

Dans chaque question, on donne une fonction. Le modèle de résolution est donné pour chaque question.
Il est demandé de recopier celui-ci soigneusement en le complétant sur les lignes qui suivent.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{1+\mathrm{e}^x}_{X}\right)=\ldots\ldots\ldots\\ \lim\limits_{X\to\ldots}\ln X=\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ldots\ldots\ .$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{1+\mathrm{e}^x}_{X}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sin x}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer $\lim\limits_{x\to0} g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{X}=\ldots\ldots\ldots \quad \text{(limite de référence)}\\ \lim\limits_{X\to\ldots}\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x\to0} g(x)=\ldots\ldots\ .$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{X}=1 \quad \text{(limite de référence)}\\ \lim\limits_{X\to1}\mathrm{e}^{-X}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x\to0} g(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$$

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Le but de cette question est de déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Recopier et compléter la phrase suivante :

En $-\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « …… ».

En $-\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

On pose : $X=\dfrac{x}{2}$ ce qui est équivalent à $2X=x$.

On a $\left(x \to -\infty\right) \Leftrightarrow \left(X \to -\infty\right)$.

Exprimer $f\left(x\right)$ en fonction de X puis achever la détermination de la limite.

$f\left(x\right) = 2X\mathrm{e}^{X}$

$\lim\limits_{X \to -\infty} \left(X\mathrm{e}^{X}\right) = 0$ (limite de référence)

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = 0$.

On vérifie évidemment ce résultat graphiquement en traçant la représentation graphique de *f* sur la calculatrice.

2°) Démontrer que la fonction F : $x \mapsto \left(2x-4\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.
On pourra se contenter des grandes étapes de calcul. On fera très attention à la rédaction et aux notations.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'\left(x\right) = 2\times\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \left(2x-4\right)\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

$= 2\times\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \left(x-2\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

$= \left(\cancel{2} + x \cancel{-2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

$= x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

$= f\left(x\right)$

On en déduit que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'\left(x\right)$ et $f''\left(x\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'\left(x\right) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''\left(x\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''\left(x\right) = -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\times\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x}\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$

$= -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x} \cancel{-\mathrm{e}^{-2x}} \cancel{+\mathrm{e}^{-2x}}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$

$= \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$