TS1

Contrôle du jeudi 15 février 2018 (4 heures)

Partie commune (3 heures)

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

• Le barème est donné sur 20.

• On précise qu'il n'y a pas de récurrence à faire pour les exercices du contrôle.

I. (7 points)

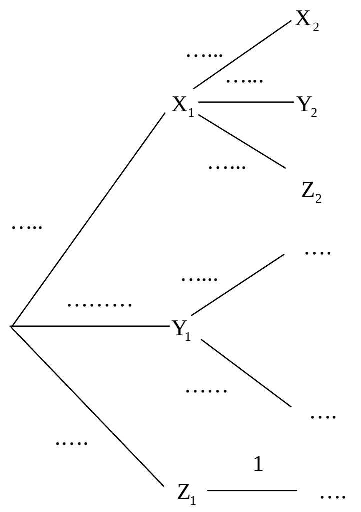
On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :
• soit susceptible d'être atteint par le virus ;
• soit malade (atteint par le virus) ;
• soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).
Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel *n*, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :
• parmi les individus susceptibles d'être atteint par le virus en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent susceptibles d'être atteint par le virus, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
• parmi les individus malades en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés ;
• tout individu immunisé en semaine *n* reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population.
On considère les évènements suivants :
X_n : « L'individu est susceptible d'être atteint par le virus en semaine *n* » ;
Y_n : « L'individu est malade en semaine *n* » ;
Z_n : « L'individu est immunisé en semaine *n* ».
En semaine 0, tous les individus sont susceptibles d'être atteint par le virus. On a donc les probabilités suivantes : $P(\mathrm{X}_0)=1$, $P(\mathrm{Y}_0)=0$ et $P(\mathrm{Z}_0)=0$.

Partie A (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans cette partie, on étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

On pourra s'aider de l'arbre de probabilités ci-contre à recopier et compléter au brouillon.



1°) Calculer la probabilité que l'individu soit immunisé en semaine 2 c'est-à-dire $P(\mathrm{Z}_2)$.
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

2°) Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité qu'il ait été malade en semaine 1 ?
On donnera la valeur exacte sous forme d'une fraction irréductible puis la valeur arrondie au millième.

Partie B (5 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Dans cette partie, on étudie à long terme l'évolution de la maladie.

De plus, on note x_n, y_n, z_n les probabilités respectives des événements X_n, Y_n et Z_n. Ainsi, $x_0=1$, $y_0=0$ et $z_0=0$.

1°) Faire au brouillon un arbre de probabilités à deux niveaux en faisant figurer pour le premier niveau les événements X_n, Y_n, Z_n et pour le deuxième niveau les événements X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}.
Certaines probabilités pourront être nulles.
Sans donner d'explications, exprimer :
x_{n+1} en fonction de x_n, y_n, z_n ; y_{n+1} en fonction de x_n, y_n, z_n ; z_{n+1} en fonction de x_n, y_n, z_n.

2°) a) Déterminer la nature de (x_n). En déduire l'expression de x_n en fonction de *n*.
b) Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = y_n - 0,25x_n$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. En déduire que pour tout entier naturel *n*, on a $y_n = \dfrac{0,85^n - 0,65^n}{4}$.

3°) On admet que les termes de (y_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

4°) Calculer la limite de chacune des suites (x_n), (y_n) et (z_n). Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ? Répondre par une phrase.

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs ou nuls dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n).

Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$;
- pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$;
- pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$.

Comme indiqué au début de l'énoncé, on répondra aux différentes questions sans faire de récurrence.

1°) Dans cette question, on choisit $u_0 = 3$.
Déterminer u_2. On donnera la valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$. On a en particulier $s_1 = u_0$.

2°) a) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $s_n > 1$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

Indication : On pourra utiliser l'égalité $s_{n+1} = s_n + u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n > 1$.

3°) À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n supérieure ou égale à 1 saisie en entrée et pour une valeur de u_0 strictement supérieure à 1 saisie en entrée.

```
Entrée :
Saisir n
Saisir u

Traitement :
s prend la valeur u
Pour   i allant de 1 à n Faire
    | u prend la valeur ...
    | s prend la valeur ...
FinPour

Sortie :
Afficher u
```

Recopier et compléter la partie traitement de cet algorithme.

4°) Justifier brièvement que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $s_n > n$. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de (u_n).

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = \dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}$ pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point de P d'affixe z_n.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

2°) En déduire que pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

IV. (1 point)

Soit Ω le point de P d'affixe $\mathrm{i}\sqrt{2}$. On note Γ le cercle de centre Ω passant par O.
Démontrer que l'une des solutions de l'équation $z^2 - z\sqrt{6} + 2 = 0$ $\quad$(E) est l'affixe d'un point de Γ.

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto m\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_m'(x)$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ en détaillant la démarche.

Pour les questions 3°) et 4°), on suppose que m est un réel strictement positif quelconque.

3°) Déterminer la valeur d'annulation de $f_m'(x)$ en fonction de m.
Faire un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f_m'(x)$ et les variations de f_m.
Calculer le(s) extremum(s) éventuel(s) de f_m.

4°) On note K_m le point de $\mathcal{C}_m$ en lequel la tangente est horizontale.
Démontrer que K_m appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{2x}$.

Copie du bac blanc du 15-2-2018

Prénom : ………………………………… *Nom :* …………………………………

I. (7 points)

Partie A (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ………………………….. (une seule égalité)

2°) ………………………………. (une seule égalité) ……………… (un seul résultat sans égalité)

Partie B (5 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) Faire tenir les trois égalités sur la ligne ci-dessous.

………

2°) ……

………

………

………

………

………

………

………

3°) ………………. (une seule égalité)

4°) ……

………

………

………

………

………

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) ……………………. (une seule égalité)

2°) ……

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) ……

………

………

………

………

4°) ……

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (1 point)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) ………………………………………………………… (une seule égalité quantifiée)

2°) ………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°)

……

……

……

4°) ………

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 15-2-2018

I.

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :
• soit susceptible d'être atteint par le virus ;
• soit malade (atteint par le virus) ;
• soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).
Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel *n*, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :
• parmi les individus susceptibles d'être atteint par le virus en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent susceptibles d'être atteint par le virus, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
• parmi les individus malades en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés ;
• tout individu immunisé en semaine *n* reste immunisé en semaine $n+1$.

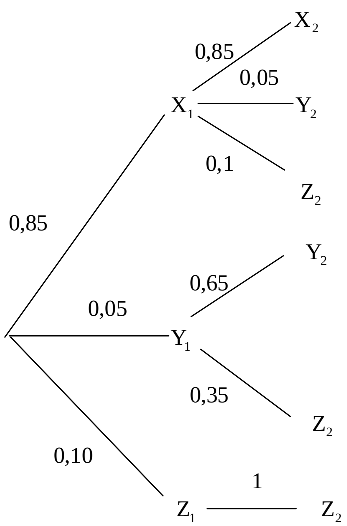
On choisit au hasard un individu dans la population.
On considère les évènements suivants :
X_n : « L'individu est susceptible d'être atteint par le virus en semaine *n* » ;
Y_n : « L'individu est malade en semaine *n* » ;
Z_n : « L'individu est immunisé en semaine *n* ».
En semaine 0, tous les individus sont susceptibles d'être atteint par le virus. On a donc les probabilités suivantes :
$P(X_0)=1$, $P(Y_0)=0$ et $P(Z_0)=0$.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

On pourra s'aider de l'arbre de probabilités ci-contre à recopier et compléter au brouillon.

On traduit les pourcentages en probabilités sous forme décimale.



1°) Calculer la probabilité que l'individu soit immunisé en semaine 2 c'est-à-dire $P(Z_2)$.
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

X_2, Y_2, Z_2 forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(Z_2)=P(Z_2\cap X_1)+P(Z_2\cap Y_1)+P(Z_2\cap Z_1)$$

$$=P(X_1)\times P(Z_2/X_1)+P(Y_1)\times P(Z_2/Y_1)+P(Z_1)\times P(Z_2/Z_1)$$

$$=0,85\times 0,1+0,05\times 0,35+0,1\times 1$$

$$=0,2025$$

2°) Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité qu'il ait été malade en semaine 1 ?
On donnera la valeur exacte sous forme d'une fraction irréductible puis la valeur arrondie au millième.

On cherche $P(Y_1/Z_2)$.

$$P(Y_1/Z_2)=\frac{P(Y_1\cap Z_2)}{P(Z_2)}$$ (définition d'une probabilité conditionnelle)

$$=\frac{0,05\times 0,35}{0,2025}$$

$$=\frac{0,0175}{0,2025}$$

$$=\frac{175}{2025}$$

$$=\frac{7\times 25}{81\times 25}$$

$$=\frac{7}{81}$$

$P(Y_1/Z_2)=0,08641975...$

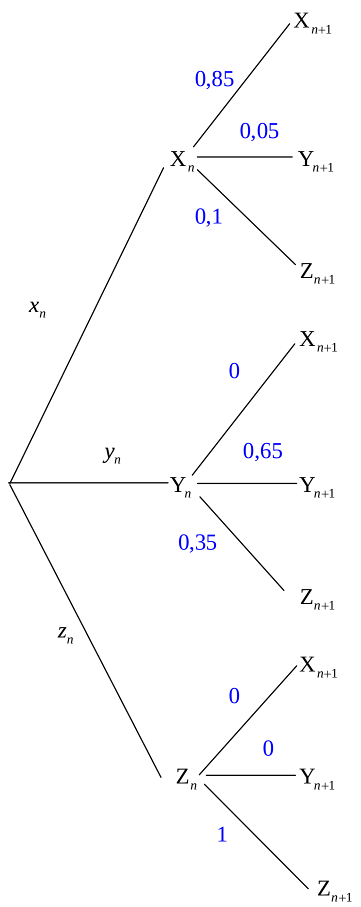
La valeur arrondie au millième de $P(Y_1/Z_2)$ est 0,086.

Partie B

Dans cette partie, on étudie à long terme l'évolution de la maladie.

De plus, on note x_n, y_n, z_n les probabilités respectives des événements X_n, Y_n et Z_n. Ainsi, $x_0=1$, $y_0=0$ et $z_0=0$.

1°) Faire au brouillon un arbre de probabilités à deux niveaux en faisant figurer pour le premier niveau les événements X_n, Y_n, Z_n et pour le deuxième niveau les événements X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}.
Certaines probabilités pourront être nulles.
Sans donner d'explications, exprimer :
x_{n+1} en fonction de x_n, y_n, z_n ; y_{n+1} en fonction de x_n, y_n, z_n ; z_{n+1} en fonction de x_n, y_n, z_n.



On peut aussi faire un arbre sur le même principe que dans la partie A en omettant les branches qui portent une probabilité nulle.

X_n, Y_n, Z_n forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on peut écrire les trois égalités suivantes :

$$P(X_{n+1}) = P(X_{n+1} \cap X_n) + P(X_{n+1} \cap Y_n) + P(X_{n+1} \cap Z_n)$$
$$P(Y_{n+1}) = P(Y_{n+1} \cap X_n) + P(Y_{n+1} \cap Y_n) + P(Y_{n+1} \cap Z_n)$$
$$P(Z_{n+1}) = P(Z_{n+1} \cap X_n) + P(Z_{n+1} \cap Y_n) + P(Z_{n+1} \cap Z_n)$$

Ces égalités donnent :

$$x_{n+1} = P(X_n) \times P(X_{n+1} / X_n) + P(Y_n) \times P(X_{n+1} / Y_n) + P(Z_n) \times P(X_{n+1} / Z_n)$$

$$y_{n+1} = P(X_n) \times P(Y_{n+1} / X_n) + P(Y_n) \times P(Y_{n+1} / Y_n) + P(Z_n) \times P(Y_{n+1} / Z_n)$$

$$z_{n+1} = P(X_n) \times P(Z_{n+1} / X_n) + P(Y_n) \times P(Z_{n+1} / Y_n) + P(Z_n) \times P(Z_{n+1} / Z_n)$$

En remplaçant les probabilités conditionnelles par leurs valeurs (lues dans l'arbre de probabilités), on obtient immédiatement les égalités suivantes :

$$x_{n+1} = 0,85x_n$$
$$y_{n+1} = 0,05x_n + 0,65y_n$$
$$z_{n+1} = 0,1x_n + 0,35y_n + z_n$$

Ces relations sont valables pour tout entier naturel *n*.

2°) a) Déterminer la nature de (x_n). En déduire l'expression de x_n en fonction de *n*.

La suite (x_n) est géométrique de raison 0,85.

Comme son premier terme est égal à 1, $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = 0,85^n$.

b) Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = y_n - 0,25x_n$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. En déduire que pour tout entier naturel *n*, on a $y_n = \dfrac{0,85^n - 0,65^n}{4}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = y_{n+1} - 0,25x_{n+1}$$

$$= 0,65y_n + 0,05x_n - 0,25 \times 0,85 \times x_n$$

$$= 0,65y_n - 0,1625x_n$$

$$= 0,65y_n - 0,25 \times 0,65 \times x_n$$

$$= 0,65(y_n - 0,25x_n)$$

$$= 0,65u_n$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,65.

Son premier terme est $u_0 = y_0 - 0,25x_0 = -0,25 = -\dfrac{1}{4}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\dfrac{1}{4} \times 0,65^n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \dfrac{1}{4}x_n + u_n$ d'où $y_n = \dfrac{1}{4} \times 0,85^n - \dfrac{1}{4} \times 0,65^n$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \dfrac{0,85^n - 0,65^n}{4}$.

3°) On admet que les termes de (y_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

$$N = 4$$

Pour déterminer cette valeur, on peut soit rentrer la suite (y_n) dans la calculatrice grâce à l'expression du terme général établie à la question précédente soit rentrer les suites (x_n), (y_n), (z_n) grâce aux relations de récurrence.

> Attention, l'énoncé précise bien que le pic épidémique est un indice et non une valeur de y_n.
> Le pic épidémique est égal à 4.

4°) Calculer la limite de chacune des suites (x_n), (y_n) et (z_n). Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ? Répondre par une phrase.

0,85 et 0,65 appartiennent à l'intervalle $]-1\,;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,65^n = 0$.

> Il est très important de préciser que $-1 < 0,85 < 1$ et $-1 < 0,65 < 1$ car il s'agit du résultat de cours sur la limite de q^n quand $-1 < q < 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

Or pour tout entier naturel n, X_n, Y_n, Z_n forment un système complet d'événements de l'univers des possibles donc la somme de leurs probabilités est égale à 1.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n + y_n + z_n = 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = 1 - x_n - y_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 1$.

Cette dernière limite permet d'affirmer sur le long terme, selon ce modèle, tous les individus seront immunisés contre l'épidémie.
Autrement dit, cela signifie qu'à terme, l'épidémie sera éradiquée.

> J'ai rajouté 1 point dans cette question, ce qui fait que la question a été noté sur 2 points (1 point pour les limites de (x_n) et (y_n) et 1 point pour la limite de (z_n)).

II.

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs ou nuls dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n).
Elle vérifie donc trois propriétés :
- $u_0 > 1$;
- pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$;
- pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$.

Comme indiqué au début de l'énoncé, on répondra aux différentes questions sans faire de récurrence.

1°) Dans cette question, on choisit $u_0 = 3$.
Déterminer u_2. On donnera la valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

On a $u_0 + u_1 = u_0 \times u_1$ soit $3 + u_1 = 3u_1$ donc $2u_1 = 3$ ce qui donne finalement $u_1 = \dfrac{3}{2}$.

On a $u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2$ soit $3 + \dfrac{3}{2} + u_2 = 3 \times \dfrac{3}{2} \times u_2$.

Cette dernière égalité donne $\dfrac{9}{2} + u_2 = \dfrac{9}{2} u_2$. Ainsi $\dfrac{7}{2} u_2 = \dfrac{9}{2}$. On en déduit que $u_2 = \dfrac{9}{7}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$. On a en particulier $s_1 = u_0$.

2°) a) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $s_n > 1$.

On a : $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$.

Par hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$ donc $u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} \geqslant 0 \quad (1)$.
De plus, $u_0 > 1 \quad (2)$ par hypothèse.

Par addition membre à membre des inégalités (1) et (2), on obtient $s_n > 1$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.
Indication : On pourra utiliser l'égalité $s_{n+1} = s_n + u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

On utilise l'égalité $\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}}_{s_n} + u_n = \underbrace{u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}}_{s_n} \times u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n + u_n = s_n \times u_n$.

La dernière égalité donne immédiatement $s_n \times u_n - u_n = s_n$. Par suite, $u_n(s_n - 1) = s_n$.

Or d'après la question précédente, $s_n \neq 1$ d'où $s_n - 1 \neq 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n > 1$.

Il y a deux méthodes possibles.

1ère méthode :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n est le quotient de deux réels strictement positifs car $s_n > 1$.
Or le dénominateur est plus petit que le numérateur on en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n > 1$.
De plus, $u_0 > 1$ par hypothèse.
On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 1$.

2e méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n - 1 = \frac{s_n}{s_n - 1} - 1 = \frac{s_n - (s_n - 1)}{s_n - 1} = \frac{1}{s_n - 1}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* \ s_n > 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \ s_n - 1 > 0$ et par suite $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n - 1 > 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n > 1$.

De plus, $u_0 > 1$ par hypothèse.
On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 1$.

3°) À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n supérieure ou égale à 1 saisie en entrée et pour une valeur de u_0 strictement supérieure à 1 saisie en entrée.

Entrée :
Saisir n
Saisir u

Traitement :
s prend la valeur u
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  u prend la valeur $\frac{s}{s-1}$
  s prend la valeur $u + s$
FinPour

Sortie :
Afficher u

Recopier et compléter la partie traitement de cet algorithme.

On peut aisément programmer cet algorithme dans la calculatrice.
Si l'on fait tourner le programme pour $n = 50$ et $u = 3$ en entrée, on obtient pour affichage : 1,018474172.
Cela permet de retrouver les valeurs de u_1 et de u_2 calculées à la question 1°).

4°) Justifier brièvement que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $s_n > n$. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de (u_n).

s_n est une somme de n termes tous strictement supérieur à 1 donc $s_n > n$.

On applique le principe de minoration d'une somme : « nombre de termes $\times$ le plus petit ».

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ s_n > n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ (limite par comparaison).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$$

Cette expression ne permet pas de trouver directement la limite de (u_n) car elle fait apparaître une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On transforme donc l'expression de u_n pour lever l'indétermination.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{s_n} = 0$ par limite d'un inverse.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{s_n}\right) = 1$ et par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ par limite d'un inverse.

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

III.

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}$ pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point de P d'affixe z_n.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n+4}}}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n}}}$$

$$= \frac{(1-\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n+4}}$$

$$= \frac{1}{(1-\mathrm{i})^4}$$

$$= \frac{1}{\left[(1-\mathrm{i})^2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{(-2\mathrm{i})^2}$$

$$= \frac{1}{-4}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$-\dfrac{1}{4}$ est un réel donc pour tout entier naturel *n*, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

Le calcul de $(1-\mathrm{i})^4$ se fait très facilement sans la calculatrice en écrivant la puissance 4 comme carré du carré.

2°) En déduire que pour tout entier naturel *n*, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

D'après le résultat de la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+4} = -\dfrac{1}{4} z_n \quad (1)$.

On va déduire de cette égalité une égalité sur les affixes de vecteurs en observant que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}$ a pour affixe z_n et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+4}}$ a pour affixe z_{n+4}.

Il faut faire très attention aux notations dans ce genre de question.

L'égalité (1) s'écrit donc $z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+4}}} = -\dfrac{1}{4} z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}}$.

On en déduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+4}} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}_n} \quad (1')$.

D'après $(1')$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+4}}$ sont colinéaires et par suite, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

IV.

Soit Ω le point de *P* d'affixe $\mathrm{i}\sqrt{2}$. On note Γ le cercle de centre Ω passant par O.
Démontrer que l'une des solutions de l'équation $z^2 - z\sqrt{6} + 2 = 0 \quad (\mathrm{E})$ est l'affixe d'un point de Γ.

J'ai rajouté un point à cet exercice. Le barème est donc : 1 point pour la résolution de l'équation ; 1 point pour la démonstration de l'appartenance du point A à Γ.

On commence par résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

C'est une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant est $\Delta = \left(-\sqrt{6}\right)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -2$.

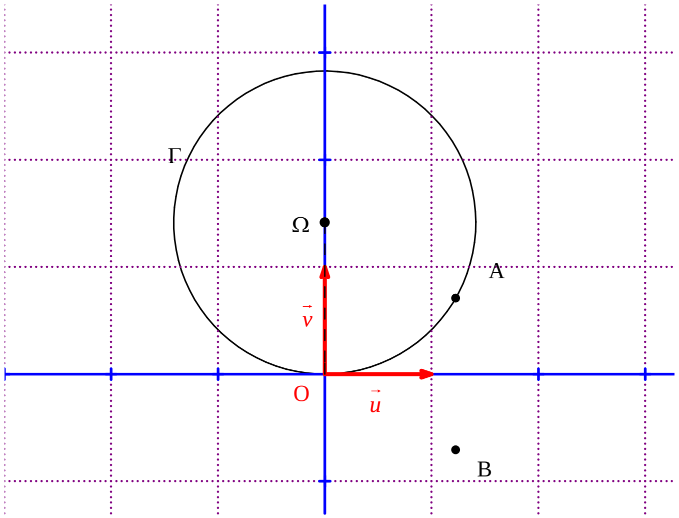
Comme $\Delta < 0$, (E) admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$.

On notera que la résolution de (E) peut aussi se faire à la calculatrice.

On fait un graphique sur lequel on place les points O et Ω ainsi que les points d'affixes z_1 et z_2.

On trace Γ et l'on constate que ce cercle semble passer par le point d'affixe z_1.

Ce graphique peut d'ailleurs être fait sur la calculatrice grâce à l'outil de dessin.



Un autre raisonnement consiste à dire que le cercle Γ est contenu dans le demi-plan fermé situé au-dessus de l'axe des réels.
Or le point d'affixe z_2 n'est pas situé dans ce demi-plan. Par suite, le seul point susceptible d'appartenir à Γ est le point d'affixe z_1.

On note donc A le point d'affixe $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$.

Pour démontrer qu'il appartient bien à Γ, on va démontrer que la distance ΩA est égale au rayon du cercle c'est-à-dire à OΩ.

$$\mathrm{O}\Omega = |\, z_\Omega \,| = |\, \mathrm{i}\sqrt{2} \,| = |\, \mathrm{i} \,| \times |\, \sqrt{2} \,| = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Omega\mathrm{A} = |\, z_\mathrm{A} - z_\Omega \,| = \left| \frac{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\left|\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right|}{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

On en déduit que $\mathrm{A} \in \Gamma$.

Remarque : On a $\mathrm{OA} = \left| \dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \right| = \dfrac{\left|\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{6+2}}{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$.
Donc le triangle OAΩ est équilatéral.

V.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto m\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_m'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = m\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}$$

Pour la suite, on peut éventuellement factoriser le résultat. Cela sera utile pour l'étude du signe.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = \mathrm{e}^x\left(m - 2\mathrm{e}^x\right)$$

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ en détaillant la démarche.

• On cherche la limite de f_m en $+\infty$.

Si $m > 0$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Si $m = 0$, on a $f_0(x) = -\mathrm{e}^{2x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$.
Si $m < 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = -\infty$.

Pour traiter tous les cas d'un seul coup, on utilise la forme factorisée suivante de $f_m(x)$: $f_m(x) = \mathrm{e}^x\left(m - \mathrm{e}^x\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(m - \mathrm{e}^x\right) = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = -\infty.$$

• On cherche la limite de f_m en en $-\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ donc par les règles d'opérations algébriques sur les limites on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = 0$.

On peut aussi utiliser la forme factorisée de $f_m(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(m - \mathrm{e}^x\right) = m \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit, } \lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = 0.$$

D'après le résultat de cette limite, $\mathcal{C}_m$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

Pour les questions 3°) et 4°), on suppose que m est un réel strictement positif quelconque.

3°) Déterminer la valeur d'annulation de $f_m'(x)$ en fonction de m.
Faire un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f_m'(x)$ et les variations de f_m.
Calculer le(s) extremum(s) éventuel(s) de f_m.

On résout l'équation $f_m'(x) = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow m - 2\mathrm{e}^x = 0 \quad$ (car $\mathrm{e}^x \neq 0$ pour tout réel x)

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \dfrac{m}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln\dfrac{m}{2} \quad$ (car $m > 0$ par hypothèse)

Pour étudier le signe de $f_m'(x)$, on utilise la forme factorisée.

Le signe de e^x ne pose pas de problème.
Pour le signe de $m - 2\mathrm{e}^x$, il faudrait résoudre l'équation $m - 2\mathrm{e}^x = 0$ ainsi que les inéquations $m - 2\mathrm{e}^x > 0$ et $m - 2\mathrm{e}^x < 0$.

x	$-\infty$		$\ln\dfrac{m}{2}$		$+\infty$
SGN de e^x		$+$		$+$	
SGN de $m-2e^x$		$+$	0	$-$	
SGN de $f_m'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_m	0	$\nearrow$	$\dfrac{m^2}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

f_m présente un maximum global sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = \ln\dfrac{m}{2}$.

On calcule $f_m\left(\ln\dfrac{m}{2}\right)$.

$$f_m\left(\ln\frac{m}{2}\right) = me^{\ln\frac{m}{2}} - e^{2\ln\frac{m}{2}}$$

$$= me^{\ln\frac{m}{2}} - \left(e^{\ln\frac{m}{2}}\right)^2$$

$$= m\times\frac{m}{2} - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

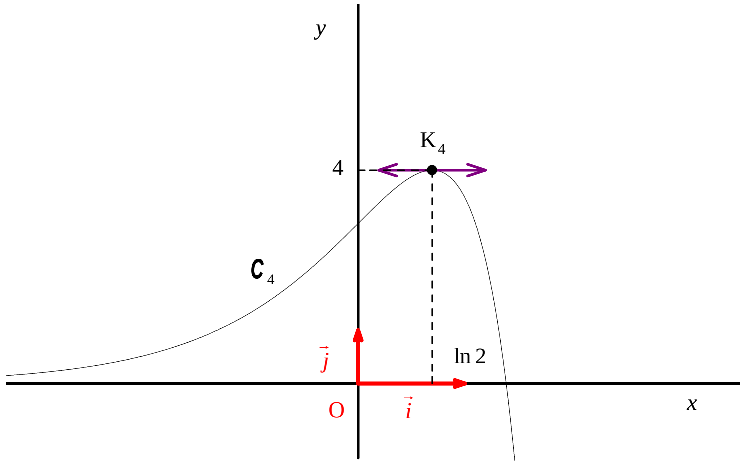
$$= m\times\frac{m}{2} - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$= \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{4}$$

$$= \frac{m^2}{4}$$

On vérifie ce tableau grâce à la calculatrice pour différentes valeurs de *m*.

Par exemple, la courbe $\mathcal{C}_4$ a l'allure suivante :



4°) On note K_m le point de $\mathcal{C}_m$ en lequel la tangente est horizontale.

Démontrer que K_m appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{2x}$.

D'après les questions précédentes, K_m a pour coordonnées $\left(\ln\dfrac{m}{2}\,;\,\dfrac{m^2}{4}\right)$.

$$e^{2x_{K_m}} = e^{2\ln\frac{m}{2}}$$

$$= \left(e^{\ln\frac{m}{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$= \frac{m^2}{4}$$

$$= y_{K_m}$$

On en déduit que K_m appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{2x}$.