TS1

Contrôle du vendredi 2 février 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………………..……………

Note : …….. / 20

I. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

À tout réel m non nul on associe la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{mx+1}{mx-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{m} \right\}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ en ne donnant le détail que pour la première limite.
En déduire que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote horizontale L dont on donnera une équation.

2°) On suppose dans cette question que m est strictement positif.
Déterminer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{m}\right)^+} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{m}\right)^-} f_m(x)$ en ne donnant le détail que pour la première limite.
En déduire que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote verticale Δ_m dont on donnera une équation.

II. (3 points)

À tout réel a strictement positif on associe la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{a - \mathrm{e}^x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to (\ln a)^+} f_a(x)$ et $\lim\limits_{x \to (\ln a)^-} f_a(x)$.

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2(x+1)^3 - (x^2-1)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

………

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1°) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}$. On attend deux lignes de calculs.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

………

………

………

………

………

………

………

………

V. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3\sqrt{x} - 2\sin(5x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VI. (2 points)

Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{\cos 3x}$ en détaillant la démarche.

………

………

………

Corrigé du contrôle du 2-2-2018

I.

À tout réel m non nul on associe la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{mx+1}{mx-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{m}\right\}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ en ne donnant le détail que pour la première limite.
En déduire que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote horizontale L dont on donnera une équation.

Lorsque x tend vers $+\infty$, le numérateur et le dénominateur de $f_m(x)$ tendent tous les deux vers $+\infty$ si $m>0$ et vers $-\infty$ si $m<0$.
On rencontre donc une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

La fonction f_m est une fonction rationnelle non nulle (c'est même une fonction homographique) donc d'après la règle des monômes de plus haut degré, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{mx}{mx} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = 1$.

Ces deux limites permettent d'affirmer que $\mathcal{C}_m$ admet la droite L d'équation $y=1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

2°) On suppose dans cette question que m est strictement positif.
Déterminer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{m}\right)^+} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{m}\right)^-} f_m(x)$ en ne donnant le détail que pour la première limite.
En déduire que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote verticale Δ_m dont on donnera une équation.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{m}\right)^+}(mx+1)=2\\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{m}\right)^+}(mx-1)=0^+\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{m}\right)^+} f_m(x)=+\infty.$$

On peut éventuellement faire un tableau de signes pour $mx-1$.

De le même manière, on obtient $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{m}\right)^-} f_m(x) = -\infty$.

Ces deux limites permettent d'affirmer que $\mathcal{C}_m$ admet la droite Δ_m d'équation $x=\dfrac{1}{m}$ pour asymptote verticale.

II.

À tout réel a strictement positif on associe la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{\text{e}^{2x}}{a-\text{e}^x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to(\ln a)^+} f_a(x)$ et $\lim\limits_{x\to(\ln a)^-} f_a(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\ln a)^+}\text{e}^{2x}=\text{e}^{2\ln a}=a^2\\ \lim\limits_{x\to(\ln a)^+}\left(a-\text{e}^x\right)=0^-\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to(\ln a)^+} f_a(x)=-\infty.$$

On peut dresser un tableau de signes pour $a-\text{e}^x$.

$a-\text{e}^x>0$ (1)	$a-\text{e}^x<0$ (2)	$a-\text{e}^x=0$ (3)
(1) $\Leftrightarrow \text{e}^x<a$ $\Leftrightarrow x<\ln a$	(2) $\Leftrightarrow \text{e}^x>a$ $\Leftrightarrow x>\ln a$	(3) $\Leftrightarrow \text{e}^x=a$ $\Leftrightarrow x=\ln a$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $a-\text{e}^x$		$+$	0	$-$	

De même, $\lim\limits_{x\to(\ln a)^-} f_a(x)=+\infty$.

Le calcul qui intervient pour la limite du numérateur est le suivant : $\text{e}^{2\ln a}=\left(\text{e}^{\ln a}\right)^2=a^2$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2(x+1)^3-\left(x^2-1\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On développe et on réduit l'expression de $f(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=x^2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)-\left(x^4-2x^2+1\right)$$
$$=x^5+3x^4+3x^3+x^2-x^4+2x^2-1$$
$$=x^5+2x^4+3x^3+3x^2-1$$

f est une fonction polynôme donc, d'après la règle du monôme de plus haut degré, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$.

2^e^ méthode :

On observe immédiatement que f est une fonction polynôme.
On cherche son monôme de plus haut degré. Celui-ci provient du terme $x^2(x+1)^3$.
Sans développer l'expression, on trouve que ce monôme est égal à x^5.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1°) Vérifier que pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}$. On attend deux lignes de calculs.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

1°)

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+\dfrac{3}{x}}$$

2°)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{\sqrt{x}}}=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

On vérifie évidemment cette limite graphiquement grâce à la calculatrice.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3\sqrt{x}-2\sin(5x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

$\sin(5x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\begin{array}{ll}\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad \sin 5x\leqslant 1 & \\ & \times(-2)\\ -2\sin 5x\geqslant -2 & \\ & +3\sqrt{x}\\ 3\sqrt{x}-2\sin 5x\geqslant 3\sqrt{x}-2 & \end{array}$$

On pose $u(x)=3\sqrt{x}-2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+ \ f(x)\geqslant u(x)$ donc d'après le théorème <u>d'un seul</u> gendarme, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

VI.

Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\cos 3x}$ en détaillant la démarche.

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos 3x=\cos\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)=\cos\pi=-1$$

Donc par limite d'un inverse $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\cos 3x}=-1$.