TS1

Contrôle du mardi 30 janvier 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(\pi x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que *f* est périodique. On attend trois lignes de calcul et une phrase de conclusion rédigée sur le modèle : « On en déduit que *f* est périodique de périodique de période … . ».

……...

……...

……...

……...

2°) Recopier et compléter sans justifier la phrase : « Les antécédents de 1 par *f* sont ……….. ».

……...

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

À tout réel *a* on associe la fonction $f_a : x \mapsto \sin x - ax$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f_a'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ …………………………………………… (une seule égalité)

2°) Compléter les phrases suivantes concernant le sens de variations de f_a :

• Si $a > 1$, alors f_a est strictement ………………………………………………… sur $\mathbb{R}$.

• Si $a < -1$, alors f_a est strictement ………………………………………………… sur $\mathbb{R}$.

Justifier avec précision la première affirmation sur les lignes ci-dessous.

……...

……...

……...

……...

……...

……...

3°) Compléter sans justifier les phrases suivantes :

• Les abscisses des points de $\mathcal{C}_1$ en lesquels la tangente est horizontale sont les réels de la forme ………………… avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Les abscisses des points de $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les réels de la forme ………………… avec $k \in \mathbb{Z}$.

4°) Dans cette question, *a* est un réel quelconque. Compléter la phrase :

La primitive de f_a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction $\text{F}_a : x \mapsto$ ………………………… .

III. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin 3x - \cos 2x - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.
Les questions sont indépendantes.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ……………………………………………..………………… (un seul résultat)

Dans la suite de l'exercice, on admettra que pour tout réel *x* on a $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \times \sin x$.

2°) Écrire sans justifier les solutions de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.
On écrira les valeurs sans égalités séparées par des points-virgules.

…………………………………………………..

3°) Soit α le réel de l'intervalle $[-\pi\,;0]$ tel que $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$.
Calculer $f(\alpha)$.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

4°) Exprimer $f(x)$ en fonction de $\sin x$.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Soit ABCD un tétraèdre. On note I le milieu de $[AB]$ et M le point défini par $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ (1).

1°) Exprimer $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$.

…….

…….

…….

…….

2°) Démontrer que M appartient au plan (ICD).

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

Corrigé du contrôle du 30-1-2018

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(\pi x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que *f* est périodique. On attend trois lignes de calcul et une phrase de conclusion rédigée sur le modèle : « On en déduit que *f* est périodique de périodique de période … . ».

On peut appliquer la propriété du cours.

> a et b sont deux réels tels que $a > 0$.
> Les fonctions $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ et $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{a}$.

Ici, $a = \pi$ et $b = 0$. On a $\dfrac{2\pi}{\pi}$.

On obtient immédiatement que *f* est périodique de périodique de période 2.

On peut le vérifier très facilement en traçant la représentation graphique de *f* sur l'écran de la calculatrice.

On peut faire la vérification par le calcul.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2) &= \cos[\pi(x+2)] \\ &= \cos(\pi x + 2\pi) \\ &= \cos(\pi x) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

2°) Recopier et compléter sans justifier la phrase : « Les antécédents de 1 par *f* sont ……….. ».

Il y a deux manières de répondre :

Les antécédents de 1 par *f* sont $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les antécédents de 1 par *f* sont les entiers relatifs pairs.

II.

À tout réel a on associe la fonction $f_a : x \mapsto \sin x - ax$ définie sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f_a'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a'(x) = \cos x - a \text{ (une seule égalité)}$$

2°) Compléter les phrases suivantes concernant le sens de variations de f_a :

• Si $a > 1$, alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Si $a < -1$, alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Justifier avec précision la première affirmation sur les lignes ci-dessous.

On suppose que $a > 1$. On a donc $1 - a < 0$.
D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x \leqslant 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x - a \leqslant 1 - a$.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a'(x) < 0$.
Par conséquent, f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3°) Compléter sans justifier les phrases suivantes :

• Les abscisses des points de $\mathcal{C}_1$ en lesquels la tangente est horizontale sont les réels de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Les abscisses des points de $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les réels de la forme $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}_a$ en lesquels la tangente est horizontale sont les solutions de l'équation $f_a'(x) = 0$ soit $\cos x = a$.

Pour $a = 1$, les solutions de l'équation $\cos x = 1$ sont les réels de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $a = \dfrac{1}{2}$, les solutions de l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sont les réels de la forme $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et les réels de la forme $-\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

4°) Dans cette question, a est un réel quelconque. Compléter la phrase :

La primitive de f_a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction $\mathrm{F}_a : x \mapsto 1 - \cos x - \dfrac{ax^2}{2}$.

En effet, une primitive de f_a sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto -\cos x - \dfrac{ax^2}{2}$ donc les primitives de f_a sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\cos x - \dfrac{ax^2}{2} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Pour que cette primitive s'annule en 0 c'est-à-dire vaille 0 pour $x = 0$, il faut et il suffit que $k = 1$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin 3x - \cos 2x - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.
Les questions sont indépendantes.

1°) Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3\cos 3x + 2\sin 2x - \cos x \text{ (un seul résultat)}$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que pour tout réel x on a $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \times \sin x$.

2°) Écrire sans justifier les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.
On écrira les valeurs sans égalités séparées par des points-virgules.

$$\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}$$

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\,;\pi]$, on transforme l'expression de $f(x)$ en une forme factorisée.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\cos 2x \sin x - \cos 2x$$

$$= \cos 2x(2\sin x - 1)$$

On obtient ensuite une équation produit nul.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

Dans l'intervalle $[0\,;\pi]$,

les solutions de l'équation $\cos 2x = 0$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$;

les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

On vérifie aisément ces solutions en traçant la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.

3°) Soit α le réel de l'intervalle $[-\pi\,;0]$ tel que $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.
Calculer $f(\alpha)$.

On utilise la forme factorisée de $f(x)$ obtenue à la question précédente : $f(x) = \cos 2x(2\sin x - 1)$.

On commence par calculer $\sin\alpha$.

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

D'où $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$ ce qui donne immédiatement $\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$.

On en déduit que $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Or $\alpha \in [-\pi\,;0]$. Donc $\sin\alpha \leqslant 0$.

Finalement, on peut écrire $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

On calcule aussi $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{2}{9} - 1$$

$$= -\frac{7}{9}$$

On calcule enfin $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \cos 2\alpha(2\sin\alpha - 1)$$

$$= -\frac{7}{9}\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{28\sqrt{2} + 21}{27}$$

4°) Exprimer $f(x)$ en fonction de $\sin x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\cos 2x \sin x - \cos 2x$$

$$= \cos 2x(2\sin x - 1)$$

$$= (1 - 2\sin^2 x)(2\sin x - 1)$$

$$= -4\sin^3 x + 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$$

IV.

Soit ABCD un tétraèdre. On note I le milieu de $\left[AB\right]$ et M le point défini par $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ (1).

1°) Exprimer $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$.

On sait que I le milieu de $\left[AB\right]$ par hypothèse donc $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

2°) Démontrer que M appartient au plan $\left(ICD\right)$.

$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MD}$

D'après cette dernière égalité, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont coplanaires. Par suite, les points M, I, C, D sont coplanaires et donc $M \in \left(ICD\right)$.

Autre méthode :

$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}=3\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ID}$