1ère S1

Contrôle du mercredi 24 janvier 2018 (50 minutes)

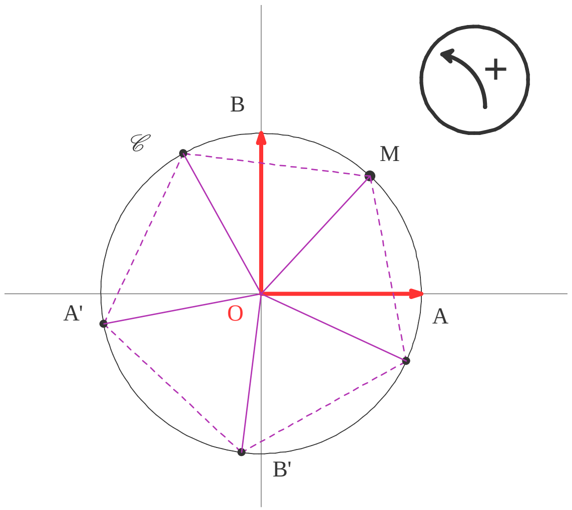
Prénom et nom : ………………………..…………

Note : ….. / 20

Dans les exercices **I**, **II**, **III**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\mathrm{A}(1\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;1)$, $\mathrm{A'}(-1\,;0)$, $\mathrm{B'}(0\,;-1)$.

I. (2 points)

Soit x un réel quelconque. On note M son image sur le cercle $\mathscr{C}$.
On a tracé ci-dessous le pentagone régulier convexe inscrit dans $\mathscr{C}$ dont un sommet est M.



Placer les point R et S images respectives de $x+\dfrac{2018\pi}{5}$ et de $x-\dfrac{16\pi}{5}$.

II. (2 points)

Pour tout entier relatif k, on note M_k l'image de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

Déterminer la position de M_k suivant la parité de k. Compléter par une lettre.

• Si k est pair, alors M_k est confondu avec ………

• Si k est impair, alors M_k est confondu avec ………

III. (1 point)

Soit x un réel quelconque. On note M et N les images respectives de x et de $-x$ sur $\mathscr{C}$.

Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)$.

……….. (une seule réponse sans égalité)

IV. (5 points : 1°) 1 point par réponse ; 2°) 3 points)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.

1°) Dans cette question, on suppose que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Compléter les égalités suivantes en donnant à chaque fois la mesure principale en radians (un seul résultat à chaque fois). Justifier par un calcul sur les lignes ci-dessous.

$\left(\vec{v}\,;-3\vec{u}\right)=$ ……………

$\left(-2\vec{u}\,;-3\vec{w}\right)=$ ……………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Dans cette question, on suppose que $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=-\dfrac{47\pi}{9}$ et $\left(3\vec{w}\,;\vec{u}\right)=\dfrac{88\pi}{9}$.

Démontrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

……………………………………………………………………..…………………………………………………

……………………………………………………………………..…………………………………………………

……………………………………………………………………..…………………………………………………

……………………………………………………………………..…………………………………………………

……………………………………………………………………..…………………………………………………

……………………………………………………………………..…………………………………………………

……………………………………………………………………..…………………………………………………

V. (2 points : 1 point par réponse)

Un client appelle à trois reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de 0,75.
Calculer la probabilité des événements A : « Le client a subi exactement deux attentes » et B : « Le client a subi au moins deux attentes ». On donnera les résultats en valeur exacte sous forme décimale.

………………… (une seule égalité) ………………… (une seule égalité)

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point bonus)

Soit x un réel quelconque. On pose $a=(1+x)^2$, $b=1+x^2$, $c=(1-x)^2$.

1°) Les réels a, b, c forment-ils, dans cet ordre, une progression arithmétique ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

…………

2°) Déterminer la valeur décimale approchée au millième par défaut du réel x strictement positif tel que le produit abc soit égal à 1.

…………………… (une seule réponse, sans égalité)

Question bonus (1 point) :

Déterminer la valeur exacte de x.

…………………… (une seule réponse, sans égalité)

VII. (2 points)

Pierre et Nicolas sont embauchés le 1er janvier 2018 dans la même entreprise.
Le salaire mensuel de Pierre est de 1600 € en 2018. Son contrat d'embauche stipule que son salaire mensuel augmente chaque année de 1 %.
Le salaire mensuel hors prime de Nicolas est de 1450 € en 2018. Son contrat d'embauche prévoit que son salaire mensuel hors prime augmente chaque année de 2 % et qu'il bénéficie en plus d'une prime mensuelle de 50 €.
En quelle année le salaire total mensuel de Nicolas dépassera-t-il celui de Pierre ?

……………… (une seule réponse sans égalité)

VIII. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.
On précise que :
• les variables n et i sont des entiers naturels ;
• la variable u est un entier relatif ;
• la valeur de n saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

On ne demande pas de programmer cet algorithme sur calculatrice.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 0

Traitement :
Pour i variant de 1 à n **Faire**
  u prend la valeur $2u+1$
FinPour

Sortie :
Afficher u

1°) Faire tourner « à la main » cet algorithme lorsque l'on saisit la valeur 4 pour n en entrée.
On remplira pour cela le tableau suivant présentant l'évolution des variables i et u.

i		1	2	3	4
u	0	…………...	…………...	…………...	…………...

Quelle est la valeur de u affichée en sortie ?

…… (une seule réponse, sans faire de phrase <u>sans égalité</u>)

2°) Conjecturer une expression en fonction de n de la valeur de la variable u affichée en sortie.

………… (une seule réponse, sans faire de phrase, <u>sans égalité</u>)

Conseils donnés à l'oral

VII. On tient compte de la prime.

VIII. 1°) pour $n = 4$

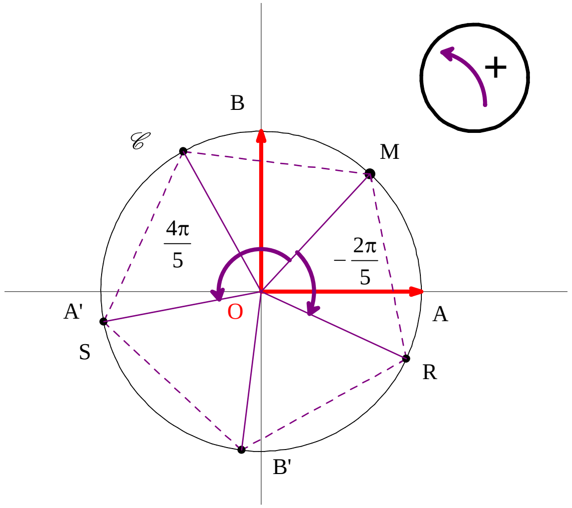
2°) n est quelconque.

Corrigé du contrôle du 24-1-2018

Dans les exercices **I**, **II**, **III**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A'}(-1\,;0)$, $\text{B'}(0\,;-1)$.

I.

Soit x un réel quelconque. On note M son image sur le cercle $\mathscr{C}$.
On a tracé ci-dessous le pentagone régulier convexe inscrit dans $\mathscr{C}$ dont un sommet est M.



Placer les point R et S images respectives de $x+\dfrac{2018\pi}{5}$ et de $x-\dfrac{16\pi}{5}$.

M est l'image de x sur le cercle trigonométrique donc x est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)$.

Tous les angles au centre (angles géométriques) d'un polygone régulier convexe ont la même mesure.

Il est peut-être nécessaire de dire ce qu'est un angle au centre pour un polygone inscrit dans un cercle.

Dans notre exercice, tous les angles au centre du pentagone ont donc pour mesure $\dfrac{2\pi}{5}$.

$$x+\frac{2018\pi}{5}=x+\frac{2020\pi-2\pi}{5}$$

$$=x+404\pi-\frac{2\pi}{5}$$

Le point R est donc le point associé à $x-\dfrac{2\pi}{5}$ sur le cercle trigonométrique.

Par suite, R est l'image de M dans la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{5}$.

$$x-\frac{16\pi}{5}=x-\frac{20\pi-4\pi}{5}$$

$$x-\frac{16\pi}{5}=x+\frac{4\pi}{5}-4\pi$$

Le point S est donc le point associé à $x+\dfrac{4\pi}{5}$ sur le cercle trigonométrique.

Par suite, S est l'image de M dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{4\pi}{5}$.

II.

Pour tout entier relatif k, on note M_k l'image de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

Déterminer la position de M_k suivant la parité de k. Compléter par une lettre.

● Si k est pair, alors M_k est confondu avec B.

● Si k est impair, alors M_k est confondu avec B'.

III.

Soit x un réel quelconque. On note M et N les images respectives de x et de $-x$ sur $\mathscr{C}$.

Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OM}}\,;\overrightarrow{\text{ON}}\right)$.

$-2x$ (une seule réponse sans égalité)

On peut aussi appliquer directement le résultat donné dans le cours.

> Si M et N sont deux points du cercle trigonométrique associés respectivement à deux réels a et b, alors une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OM}}\,;\overrightarrow{\text{ON}}\right)$ est $b-a$.

IV.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.

1°) Dans cette question, on suppose que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Compléter les égalités suivantes en donnant à chaque fois la mesure principale en radians (un seul résultat à chaque fois). Justifier par un calcul sur les lignes ci-dessous.

$\left(\vec{v}\,;-3\vec{u}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$

$\left(-2\vec{u}\,;-3\vec{w}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

$\left(\vec{v}\,;-3\vec{u}\right)=\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)+\pi$ (car 1 et – 3 sont de signes contraires)

$\left(\vec{v}\,;-3\vec{u}\right)=-\frac{\pi}{3}+\pi$

$\left(\vec{v}\,;-3\vec{u}\right)=\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{v}\,;-3\vec{u}\right)$ est $\frac{2\pi}{3}$.

$\left(-2\vec{u}\,;-3\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$ (car – 2 et – 3 sont de même signe)

$\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$.

2°) Dans cette question, on suppose que $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=-\frac{47\pi}{9}$ et $\left(3\vec{w}\,;\vec{u}\right)=\frac{88\pi}{9}$.
Démontrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

On écrit tout d'abord que $\left(3\vec{w}\,;\vec{u}\right)=\left(\vec{w}\,;\vec{u}\right)$ donc $\left(\vec{w}\,;\vec{u}\right)=\frac{88\pi}{9}$.

On va déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)$.

$\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)+\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)
$\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)-\left(\vec{w}\,;\vec{u}\right)$
$\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=-\frac{47\pi}{9}-\frac{88\pi}{9}$
$\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=-15\pi$

La mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)$ est π donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires de sens contraires.

V.

Un client appelle à trois reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de 0,75.
Calculer la probabilité des événements A : « Le client a subi exactement deux attentes » et B : « Le client a subi au moins deux attentes ». On donnera les résultats en valeur exacte sous forme décimale.

$P(\text{A})=0{,}140625$ (une seule égalité)

$P(\text{B})=0{,}15625$ (une seule égalité)

Chaque appel est une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à un succès S : « Le client est pris sans attente » soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « Le client subit une attente ».

Comme on répète trois fois cette épreuve dans des conditions identiques indépendantes, il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
On dresse un arbre de probabilités à trois niveaux.

Les résultats qui réalisent A sont ceux constitués d'un succès et de deux échecs.

$P(\text{A})=P\left(\text{S}-\overline{\text{S}}-\overline{\text{S}}\right)+P\left(\overline{\text{S}}-\text{S}-\overline{\text{S}}\right)+P\left(\overline{\text{S}}-\overline{\text{S}}-\text{S}\right)$

$=3\times0{,}75\times0{,}25^2$

$=0{,}140625$

$P(\text{B})=P(\text{A})+P\left(\overline{\text{S}}-\overline{\text{S}}-\overline{\text{S}}\right)$

$=0{,}140625+0{,}25^3$

$=0{,}15625$

Remarque : $P(\text{A})=\frac{9}{64}$ et $P(\text{B})=\frac{5}{32}$

VI.

Soit x un réel quelconque. On pose $a=(1+x)^2$, $b=1+x^2$, $c=(1-x)^2$.

1°) Les réels a, b, c forment-ils, dans cet ordre, une progression arithmétique ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

oui

1ère méthode :

On développe a et c : $a=1+2x+x^2$ et $c=1-2x+x^2$.

On constate que $b=a-2x$ et que $c=b-2x$.

On peut donc affirmer que les nombres a, b et c forment dans cet ordre une progression arithmétique de raison $-2x$.

2e méthode :

$b-a=\left(1+x^2\right)-(1+x)^2=-2x$

$c-b=(1-x)^2-\left(1+x^2\right)=-2x$

Les différences sont égales donc les nombres a, b et c forment dans cet ordre une progression arithmétique de raison $-2x$.

2°) Déterminer la valeur décimale approchée au millième par défaut du réel x strictement positif tel que le produit abc soit égal à 1.

1,272 (une seule réponse, sans égalité)

On cherche $x>0$ tel que $abc=1$ (1).

On pose $\text{A}=abc$.

On commence par développer et réduire A. Pour cela, on essaie de s'y prendre de manière astucieuse.

$$\text{A}=(1+x)^2\times(1+x^2)\times(1-x)^2$$

$$=(1+x)^2(1-x)^2\times(1+x^2)$$

$$=\left[(1+x)(1-x)\right]^2\times(1+x^2)$$

$$=(1-x^2)^2\times(1+x^2)$$

$$=(x^4-2x^2+1)\times(1+x^2)$$

$$=x^6-x^4-x^2+1$$

(1) est successivement équivalente à :

$$x^6-x^4-x^2+1=1$$

$$x^6-x^4-x^2=0$$

On utilise l'application de la calculatrice qui permet de résoudre des équations polynomiales (de manière exacte ou approchée).

On peut utiliser la commande de résolution d'une équation de la calculatrice en rentrant directement l'équation $(1+x)^2\times(1+x^2)\times(1-x)^2=1$. Mais la calculatrice fournit une seule solution au lieu de trois et n'est donc pas très fiable.

Question bonus :

Déterminer la valeur exacte de x.

$\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (une seule réponse, sans égalité)

On reprend la résolution de (1) à partir de $x^6-x^4-x^2=0$.

(1) est successivement équivalente à :

$$x^2(x^4-x^2-1)=0$$

$$x^2=0 \text{ ou } x^4-x^2-1=0$$

$$x=0 \text{ ou } x^4-x^2-1=0$$

On doit donc résoudre l'équation $x^4-x^2-1=0$ (2). Il s'agit d'une équation bicarrée que l'on résout par changement d'inconnue.

On pose $X=x^2$.

(2) s'écrit alors $X^2-X-1=0$ $(2')$.

On considère le polynôme X^2-X-1.

Les racines de ce polynôme sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Or $X=x^2$.

On en déduit que (2) est successivement équivalente à :

$$x^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x^2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (impossible car } \frac{1-\sqrt{5}}{2}<0\text{)}$$

$$x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

VII.

Pierre et Nicolas sont embauchés le 1er janvier 2018 dans la même entreprise.
Le salaire mensuel de Pierre est de 1600 € en 2018. Son contrat d'embauche stipule que son salaire mensuel augmente chaque année de 1 %.
Le salaire mensuel hors prime de Nicolas est de 1450 € en 2018. Son contrat d'embauche prévoit que son salaire mensuel hors prime augmente chaque année de 2 % et qu'il bénéficie en plus d'une prime mensuelle de 50 €.
En quelle année le salaire total mensuel de Nicolas dépassera-t-il celui de Pierre ?

2021 (une seule réponse sans égalité)

Année	Pierre	Nicolas
2018	1600	1450
2019	1616	1529
2020	1632,16	1609,58
2021	1648,48	1691,77
2022	1664,96	1775,61

Pour Pierre, l'augmentation de 1 % par an se traduit par une multiplication par 1,01.

Pour Nicolas, le salaire de chaque année s'obtient en multipliant le précédent par 1,02 et en ajoutant 50 au résultat.
Durant tous les mois de 2018, le salaire de Nicolas est de 1450 €.
Durant tous les mois de 2019, le salaire de Nicolas sera égal à $1,02\times1450+50=1529$ €.

La prime est incorporée dans le salaire mensuel pour former le salaire total.

VIII.

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.
On précise que :
• les variables *n* et *i* sont des entiers naturels ;
• la variable *u* est un entier relatif ;
• la valeur de *n* saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

On ne demande pas de programmer cet algorithme sur calculatrice.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 0

Traitement :
Pour *i* variant de 1 à *n* **Faire**
  u prend la valeur $2u+1$
FinPour

Sortie :
Afficher *u*

1°) Faire tourner « à la main » cet algorithme lorsque l'on saisit la valeur 4 pour *n* en entrée.
On remplira pour cela le tableau suivant présentant l'évolution des variables *i* et *u*.

i		1	2	3	4
u	0	1	3	7	15

Quelle est la valeur de *u* affichée en sortie ?

15 (une seule réponse, sans faire de phrase sans égalité)

2°) Conjecturer une expression en fonction de *n* de la valeur de la variable *u* affichée en sortie.

2^n-1 (une seule réponse, sans faire de phrase, sans égalité)

On observe que pour les différentes valeurs de *n*, le résultat obtenu en sortie est égal à une puissance de 2 avec un exposant entier naturel moins un.
Plus précisément, on peut obtenir que l'exposant de 2 est égal à l'entier naturel *n* saisi en entrée.

Pour $n=1$, la valeur finale affichée en sortie de l'algorithme est égale à 1 que l'on peut écrire 2^1-1.

Pour $n=2$, la valeur finale affichée en sortie de l'algorithme est égale à 3 que l'on peut écrire 2^2-1.

Pour $n=3$, la valeur finale affichée en sortie de l'algorithme est égale à 7 que l'on peut écrire 2^3-1.

Pour $n=4$, la valeur finale affichée en sortie de l'algorithme est égale à 15 que l'on peut écrire 2^4-1.