TS1

Contrôle du vendredi 19 janvier 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………..……………

Note : ……../ 20

Dans le exercices **I** et **II**, le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

À tout point M de P, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \text{e}^{-|z|} \times z$.

1°) Soit M un point de P, distinct de O. Démontrer que les points O, M, M' sont alignés et préciser dans quel ordre.

2°) On note Γ le cercle de centre O et de rayon ln 2. Soit M un point quelconque de Γ.
Choisir sans justifier la proposition correcte :

☐ M' est le milieu de $[\text{OM}]$.

☐ M est le milieu de $[\text{OM}']$.

☐ O est le milieu de $[\text{MM}']$.

II. (6 points : 3 points + 3 points)

On note A et B les points de P d'affixes respectives $1-\text{i}$ et 2i.
Déterminer en rédigeant avec soin :

- l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\sqrt{2}\,|z-1+\text{i}| = |(1-\text{i})z|$;
- l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $|2\bar{z}+4\text{i}| = 5$.

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Pour tout nombre complexe *z*, on pose $Z = z\overline{z} + z - \overline{z} - 1$.

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe *z*, on a : $Z = (z-1)(\overline{z}+1)$.

……

……

……

2°) Démontrer que pour tout nombre complexe *z* on a : $|Z| = |z^2 - 1|$.

……

……

……

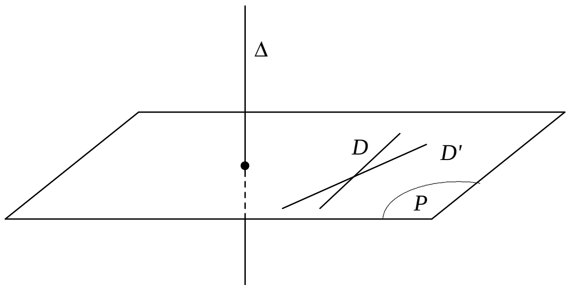
……

……

……

IV. (2 points)

Énoncer la propriété illustrée par la figure ci-dessous qui commence par : « Si une droite est …, alors … ».



……

……

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

Soit ABCDEFGH un cube.

1°) Que représente le plan (BFD) pour le segment [AC] ? Répondre par une phrase sans justifier.

……

……

2°) Soit M un point quelconque de (FH) et N un point quelconque de la droite (DH).
Que peut-on dire des droites (MN) et (AC) ? Justifier avec précision.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 19-1-2018

I.

À tout point M de *P*, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = e^{-|z|} \times z$ .4

Comme $|z|$ est un réel, $-|z|$ est aussi un réel et donc $e^{-|z|}$ également.
Ainsi, z' est le produit d'un réel par *z*.
On peut noter également que $e^{-|z|}$ est un réel strictement positif.

1°) Soit M un point de *P*, distinct de O. Démontrer que les points O, M, M' sont alignés et préciser dans quel ordre.

$z_{\overrightarrow{OM}} = z_M = z$

$z_{\overrightarrow{OM'}} = z_{M'} = z' = e^{-|z|} \times z$

On observe que $z_{\overrightarrow{OM'}} = e^{-|z|} z_{\overrightarrow{OM}}$.
$e^{-|z|} \in \mathbb{R}$ donc on peut écrire $\overrightarrow{OM'} = e^{-|z|}\overrightarrow{OM} \quad (1)$.

D'après (1), $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et, par suite, les points O, M, M' sont alignés.

Pour déterminer l'ordre dans lequel ils sont alignés, on reprend l'égalité (1) en regardant le coefficient de colinéarité. Il faut cependant commencer par préciser que, comme $z \neq 0$ par hypothèse, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont tous les deux non nuls.

De manière évidente, on a $e^{-|z|} > 0$ car le résultat d'une exponentielle est toujours strictement positif.

De plus, $|z| > 0$ d'où $-|z| < 0$ donc $e^{-|z|} < 1$.

On donc $0 < e^{-|z|} < 1$. Compte tenu de cette inégalité, (1) permet d'affirmer que $M' \in]OM[$.

On a donc l'ordre : O, M', M.

2°) On note Γ le cercle de centre O et de rayon ln 2. Soit M un point quelconque de Γ.
Choisir sans justifier la proposition correcte :
☒ M' est le milieu de $[OM]$.
☐ M est le milieu de $[OM']$.
☐ O est le milieu de $[MM']$.

Grâce à la question précédente, on peut éliminer d'emblée les réponses 2 et 3.
Il est néanmoins intéressant de prouver le résultat de manière rigoureuse.

On sait que $M \in \Gamma$ par hypothèse donc $OM = \ln 2$ d'où $|z| = \ln 2$.

On a alors : $z' = e^{-\ln 2} \times z$.

Or $e^{-\ln 2} = \dfrac{1}{e^{\ln 2}} = \dfrac{1}{2}$ donc on a $z' = \dfrac{1}{2} z \quad (1)$.

Il y a deux manières ensuite pour conclure :

1ère manière :
L'égalité (1) permet d'écrire $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OM}$ ce qui permet d'en déduire que M' est le milieu de $[OM]$.

2e manière :
L'égalité (1) s'écrit aussi $z' = \dfrac{z}{2}$ ou encore $z' = \dfrac{z+0}{2}$.
D'après la formule donnant l'affixe du milieu d'un segment, on peut affirmer que M' est le milieu de $[OM]$.

II.

On note A et B les points de *P* d'affixes respectives $1 - i$ et $2i$.
Déterminer en rédigeant avec soin :
• l'ensemble *E* des points M d'affixe *z* tels que $\sqrt{2}\,|z - 1 + i| = |(1-i)z|$;
• l'ensemble *F* des points M d'affixe *z* tels que $|2\bar{z} + 4i| = 5$.

Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|z-1+i| = |(1-i)z| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|z-(1-i)| = |1-i|\,|z| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|z-(1-i)| = \sqrt{2}\,|z| \\ &\Leftrightarrow |z-(1-i)| = |z| \\ &\Leftrightarrow AM = OM \\ &\Leftrightarrow MA = MO \end{aligned}$$

Donc *E* est la médiatrice du segment $[OA]$.

Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow |2\bar{z}+4i| = 5 \\ &\Leftrightarrow \left|\overline{2\bar{z}+4i}\right| = 5 \\ &\Leftrightarrow |2z-4i| = 5 \\ &\Leftrightarrow 2|z-2i| = 5 \\ &\Leftrightarrow |z-2i| = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow BM = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Donc *F* est le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

III. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z\bar{z} + z - \bar{z} - 1$.

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a : $Z = (z-1)(\bar{z}+1)$.

1ère méthode :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} Z &= (z\bar{z}+z)-(\bar{z}+1) \\ &= z(\bar{z}+1)-(\bar{z}+1) \\ &= (z-1)(\bar{z}+1) \end{aligned}$$

2e méthode :

On pose $Z' = (z-1)(\bar{z}+1)$ pour tout nombre complexe z.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} Z' &= z\bar{z}+z-\bar{z}-1 \\ &= Z \end{aligned}$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C} \quad Z = (z-1)(\bar{z}+1)$.

2°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a : $|Z| = |z^2-1|$.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |Z| = |(z-1)(\bar{z}+1)|$

$= |z-1| \times |\bar{z}+1|$ (on séparé par la propriété du module d'un produit)

$= |z-1| \times |\overline{z+1}|$

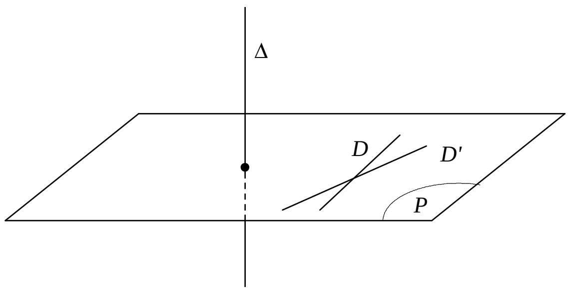
$= |z-1| \times |z+1|$ (le module d'un conjugué d'un nombre complexe est égal au module de ce nombre)

$= |(z-1)(z+1)|$

$= |z^2-1|$

IV.

Énoncer la propriété illustrée par la figure ci-dessous qui commence par : « Si une droite de l'espace est …, alors … ».



Si une droite de l'espace est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

V.

Soit ABCDEFGH un cube.

1°) Que représente le plan (BFD) pour le segment $[AC]$? Répondre par une phrase sans justifier.

Le plan (BFD) est le plan médiateur du segment $[AC]$.

2°) Soit M un point quelconque de (FH) et N un point quelconque de la droite (DH).
Que peut-on dire des droites (MN) et (AC) ? Justifier avec précision.

D'après la question précédent, (BFD) est orthogonal à la droite (AC).

Or $M \in (FH)$ et $N \in (DH)$ par hypothèse donc la droite (MN) est incluse dans le plan (BFD).

Or si une droite de l'espace est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On en déduit que les droites (MN) et (AC) sont orthogonales.