1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 20 décembre 2017 (50 min)

Prénom : ………………………………… **Nom :** …………………………………

Note : …. / 20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = $ .... (un seul résultat)

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au A point d'abscisse -2 ?
Donner la réponse puis présenter les calculs sur la ligne ci-dessous.
Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

……………… (une seule réponse)

………

3°) Quelle est l'abscisse du point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = -3x$?

…………

Écrire sur les lignes ci-dessous l'équation qui permet de résoudre la question puis présenter la résolution de cette équation.

………

………

………

………

………

II. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; -2\}$.

Calculer $f'(x)$. On attend un résultat simplifié avec numérateur sous forme développée réduite.
Il est demandé de ne pas développer le dénominateur et de faire les barres de fractions à la règle.

………

………

………

………

………

………

………

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 3 points)

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbb{R}$ où a, b, c sont trois réels, a étant non nul. On sait que $\mathscr{C}$ passe par les points $\text{A}(2 ; 4)$ et $\text{B}(-2 ; -2)$.

On sait également que la tangente T en A à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

1°) Recopier et compléter par un réel l'égalité $f'(2) = $ ....

……………… (une seule égalité).

2°) Traduire les conditions par des égalités vérifiées par a, b, c.

……………………………………………………………………………………… (écrire trois égalités)

À l'aide de l'application de la calculatrice permettant de résoudre les systèmes linéaires, déterminer les valeurs de a, b, c.

……………………………………………………………………………………… (écrire trois égalités)

IV. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1. Rédiger avec soin.

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur l'écran de la calculatrice puis utiliser la commande qui permet de tracer une tangente pour vérifier que l'équation est correcte.

3°) Recopier et compléter la phrase :

« $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ……………………………. . »

…..………

…..………

Détailler la résolution sur les lignes suivantes.

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

V. (1 point)

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

Exprimer la dérivée de la fonction u^3 en fonction de u et de u'.

On écrira une seule égalité sous la forme $\left(u^3\right)' = ...$ à recopier et compléter sur la ligne ci-dessous.

…………………………… (une seule égalité).

VI. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{2}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que pour tout réel $x \neq 0$, on ait : $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Écrire une seule égalité sous la forme $\mathrm{F}(x) = ...$.

……………………………………

Indications données à l'oral

II. Il ne faut pas développer le dénominateur dans le résultat.

III.

1°) On attend une valeur.

2°) Chaque égalité comporte des a, des b, des c.

On effectuera la résolution à la main ou à la machine.

IV.

1°) On attend une phrase réponse.

2°) On attend les valeurs exactes.

Corrigé du contrôle du 20-12-2017

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (un seul résultat)

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ (un seul résultat)

On utilise la formule du cours $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au A point d'abscisse -2 ?
Donner la réponse puis présenter les calculs sur la ligne ci-dessous.
Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

$f'(-2) = -\dfrac{2}{(-2)^3} = \dfrac{2}{2^3}$ (une seule réponse)

$f'(-2) = -\dfrac{2}{(-2)^3} = \dfrac{2}{2^3} = \dfrac{1}{4}$

3°) Quelle est l'abscisse du point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = -3x$?

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

Écrire sur les lignes ci-dessous l'équation qui permet de résoudre la question puis présenter la résolution de cette équation.

L'abscisse du point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à D est la solution de l'équation $f'(x) = -3 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à

$-\dfrac{2}{x^3} = -3$

$x^3 = \dfrac{2}{3}$

$x^3 =$ racine cubique de $\dfrac{2}{3}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ (valeur exacte)

Remarques :

- La racine cubique n'est pas égale à la racine carrée de la racine carrée.

- On peut écrire $x = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$ (même propriété que pour les racines carrées). Cette écriture ne présente cependant aucun intérêt par rapport à celle plus simple de $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; -2\}$.
Calculer $f'(x)$. On attend un résultat simplifié avec numérateur sous forme développée réduite.
Il est demandé de ne pas développer le dénominateur et de faire les barres de fractions à la règle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; -2\} \quad f'(x) = \frac{(2x-3)\left(x^2+2x\right) - \left(x^2 - 3x + 1\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2x^3 + 4x^2 - 3x^2 - 6x\right) - \left(2x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 6x + 2x + 2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2x^3 + x^2 - 6x\right) - \left(2x^3 - 4x^2 - 4x + 2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$= \frac{5x^2 - 2x - 2}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

III.

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbb{R}$ où a, b, c sont trois réels, a étant non nul. On sait que $\mathscr{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(2 ; 4)$ et $\mathrm{B}(-2 ; -2)$.
On sait également que la tangente T en A à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

1°) Recopier et compléter par un réel l'égalité $f'(2) = \ldots\ldots\ldots$.

$f'(2) = \dfrac{1}{2}$ (une seule égalité).

2°) Traduire les conditions par des égalités vérifiées par a, b, c.

$4a + 2b + c = 4$; $4a - 2b + c = -2$; $4a + b = \dfrac{1}{2}$ (écrire trois égalités)

$\mathrm{A} \in \mathscr{C}$ donc $f(2) = 4$ ce qui donne la première équation.

$B \in \mathscr{C}$ donc $f(-2) = -2$ ce qui donne la deuxième équation.

On a $f'(2) = \frac{1}{2}$ ce qui donne la troisième égalité (puisque la dérivée de *f* est donnée par $f'(x) = 2ax + b$).

À l'aide de l'application de la calculatrice permettant de résoudre les systèmes linéaires, déterminer les valeurs de *a*, *b*, *c*.

$$a = -\frac{1}{4} \; ; \; b = \frac{3}{2} \; ; \; c = 2 \quad \text{(écrire trois égalités)}$$

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer une équation de la tangente *T* à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1. Rédiger avec soin.

On commence par calculer la dérivée de *f*.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$f(1) = 1^3 - 3\times1^2 + 2\times1 + 2 = 2$

$f'(1) = 3\times1^2 - 6\times1 + 2 = -1$

Donc *T* a pour équation $y = -1(x-1) + 2$ soit $y = -x + 3$ ou encore $y = 3 - x$.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur l'écran de la calculatrice puis utiliser la commande qui permet de tracer une tangente pour vérifier que l'équation est correcte.

On vérifie sur l'écran de la calculatrice.

3°) Recopier et compléter la phrase :

« $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ……………………………. . »

$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$.

Détailler la résolution sur les lignes suivantes.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les solutions de l'équation $f'(x) = 0 \quad (1)$.

(1) s'écrit $3x^2 - 6x + 2 = 0$.

Il s'agit d'une équation du second degré.

On calcule le discriminant réduit : $\Delta' = (-3)^2 - 3\times2 = 9 - 6 = 3$.

$\Delta' > 0$ donc (1) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$.

On vérifie à l'aide de la commande de résolution des équations du second degré de la calculatrice.

V.

Soit *u* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

Exprimer la dérivée de la fonction u^3 en fonction de *u* et de u'.
On écrira une seule égalité sous la forme $\left(u^3\right)' = ...$ à recopier et compléter sur la ligne ci-dessous.

$$\left(u^3\right)' = 3u'u^2 \quad \text{(une seule égalité)}$$

On applique la formule de dérivée du cours $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$ pour $n = 3$.

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + \frac{2}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que pour tout réel $x \neq 0$, on ait : $F'(x) = f(x)$.
Écrire une seule égalité sous la forme $F(x) = ...$.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x}$$

On réécrit $f(x) = x^2 + 2\times\frac{1}{x^2}$.

Vocabulaire : On dit que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}^*$.