TS1

Contrôle du samedi 13 janvier 2018 (3 heures)

● Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé, ni de rien surligner. Celui-ci ne doit pas être rendu avec la copie.

● Les exercices **I** à **V** sont à traiter sur la copie jointe au sujet. On traitera les exercices **VI** et **VII** sur copie.

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Le service qualité d'une entreprise effectue systématiquement deux contrôles sur les objets qu'elle produit.
Chaque objet subit un premier contrôle puis un deuxième contrôle, les deux contrôles portant sur des propriétés différentes de l'objet.
Une étude statistique menée pendant un mois a montré que :

● 90 % des objets passent le premier contrôle avec succès ;

● parmi ceux qui ne passent pas avec succès ce premier contrôle, 40 % ont passé le deuxième contrôle avec succès ;

● 80 % des objets sortant de cette entreprise ont passé avec succès les deux contrôles.

Une machine de contrôle de qualité prélève au hasard un des objets produits par cette entreprise pendant le mois d'étude.

1°) Calculer la probabilité que l'objet prélevé passe avec succès le deuxième contrôle sachant qu'il a passé avec succès le premier contrôle.
On donnera la réponse sous forme d'une fraction irréductible.

2°) Calculer la probabilité que l'objet prélevé ne passe pas avec succès le deuxième contrôle.
On donnera la réponse sous forme décimale.

II. (1 point)

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P) tels que $P(\mathrm{A})=\dfrac{3}{5}$, $P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{2}$ et $P\left(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}\right)=\dfrac{1}{3}$.

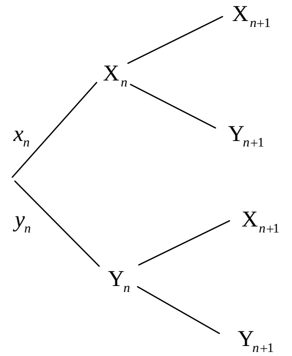
Calculer $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque seconde, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
On suppose que :
- si le mobile est dans la position A il y reste avec la probabilité 0,3 et il passe dans la position B avec la probabilité 0,7 ;
- si le mobile est dans la position B il y reste avec la probabilité 0,2 et il passe dans la position A avec la probabilité 0,8.

Pour tout entier naturel n, on note X_n l'événement « Le mobile est en A au bout de n secondes » et Y_n l'événement « Le mobile est en B au bout de n secondes ». De plus, on note x_n et y_n les probabilités respectives de ces deux événements X_n et Y_n.

Au brouillon, reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre en écrivant les probabilités conditionnelles sur les branches partant de X_n et Y_n sous forme décimale.



1°) À l'aide de l'arbre, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et y_n ainsi que y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2°) On suppose dans cette question que le mobile est initialement en A. On a donc $x_0=1$ et $y_0=0$.
Déterminer la probabilité que le mobile soit en A au bout de 2 secondes et que le mobile soit en B au bout de 2 secondes. On donnera les résultats sous forme décimale.

3°) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Après 4 secondes, le mobile a autant de chances d'être dans la position A que d'être dans la position B. »
Répondre en justifiant brièvement. On discutera suivant la position initiale du mobile.

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public.
Dans une urne, se trouve placées 7 boules noires et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard. Si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si la boule est blanche, le joueur prend une deuxième boule (sans remettre la première boule tirée dans l'urne) et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée rapporte au joueur 1 € et chaque boule blanche 2 €.
Pour un jeu, le joueur paye 2 €. On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique en euros du joueur (c'est-à-dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

Au brouillon, faire un arbre de probabilités en utilisant les événements A : « Le joueur tire une boule noire au premier tirage » et B : « Le joueur tire une boule noire au deuxième tirage ».
On écrira les probabilités sous forme de fractions irréductibles.
On prendra garde que la boule tirée au premier tirage n'est pas remise dans l'urne.

1°) Donner la loi de probabilité de X dans un tableau.
On donnera sans justifier les probabilités sous forme de fractions irréductibles.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On attend deux lignes de calculs dans chaque cas.
On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

3°) Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques ; après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne.
Calculer la probabilité des événements U : « Le gain du joueur est nul » et V : « Le gain du joueur est strictement négatif ».
On donnera les valeurs exactes des résultats sous forme décimale.
Aucun détail des calculs n'est attendu.

V. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{m}{\mathrm{e}^x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer m tel que la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse ln 2 soit parallèle à la droite L d'équation $y = 1 - x$.

2°) En admettant que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$.
En déduire que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote horizontale Δ_m, dont on donnera une équation, en $-\infty$.

Dans les questions 3°) et 4°), on suppose que m est un réel quelconque strictement supérieur à 1.

3°) Exprimer en fonction de m les coordonnées du point d'intersection J_m de $\mathcal{C}_m$ et de Δ_m.

4°) Exprimer en fonction de m l'abscisse du point K_m de $\mathcal{C}_m$ en lequel la tangente est horizontale.
Démontrer que K_m appartient à la courbe Γ d'équation $y = 2\mathrm{e}^x + 1$.

VI. (1 point)

On pose $z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{3-\sqrt{2}}$.
Calculer le module de z.

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À tout point M du plan P, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \left(|\, z\,| - 2\right)\overline{z}$.
On note U et V les points d'affixes respectives 1 et i. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Soit M un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
Recopier la proposition exacte.

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).
☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).
☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

2°) a) Soit M un point quelconque de la demi-droite $[\mathrm{OV})$.
On note z son affixe et on pose $z = \mathrm{i}b$ où b est un réel positif ou nul.
Exprimer z' en fonction de b.

b) Déterminer l'ensemble des point M' lorsque M décrit la demi-droite $[\mathrm{OV})$.
Après étude, on rédigera une conclusion selon le modèle suivant à recopier et à compléter :
« Lorsque M décrit la demi-droite $[\mathrm{OV})$, M' décrit … ».

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : …….. / 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) …………… (un seul résultat, sans égalité) …………… (un seul résultat, sans égalité)

II. (1 point)

…………….…………… (une seule égalité)

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ………………………… (une seule égalité) ………………………… (une seule égalité)

V. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 13-1-2018

I.

Le service qualité d'une entreprise effectue systématiquement deux contrôles sur les objets qu'elle produit.
Chaque objet subit un premier contrôle puis un deuxième contrôle, les deux contrôles portant sur des propriétés différentes de l'objet.
Une étude statistique menée pendant un mois a montré que :

- 90 % des objets passent le premier contrôle avec succès ;
- parmi ceux qui ne passent pas avec succès ce premier contrôle, 40 % ont passé le deuxième contrôle avec succès ;
- 80 % des objets sortant de cette entreprise ont passé avec succès les deux contrôles.

Une machine de contrôle de qualité prélève au hasard un des objets produits par cette entreprise pendant le mois d'étude.

1°) Calculer la probabilité que l'objet prélevé passe avec succès le deuxième contrôle sachant qu'il a passé avec succès le premier contrôle.
On donnera la réponse sous forme d'une fraction irréductible.

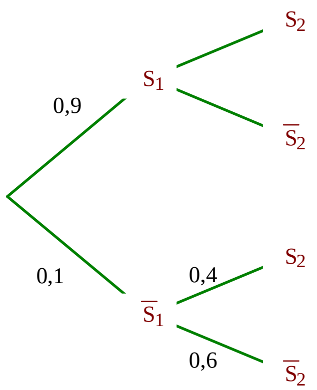
On note S_1 l'événement « L'objet passe le premier contrôle » et B_2 l'événement « L'objet passe le deuxième contrôle ».

On essaie de dresser un arbre de probabilités avec les informations de l'énoncé.

La phrase « 90 % des objets passent le premier contrôle avec succès » se traduit par $P(S_1)=0,9$.
La phrase « parmi ceux qui ne passent pas avec succès ce premier contrôle, 40 % ont passé le deuxième contrôle avec succès » se traduit par $P\left(S_2/\overline{S_1}\right)=0,4$ (probabilité conditionnelle).
La phrase « 80 % des objets sortant de cette entreprise ont passé avec succès les deux contrôles » se traduit par .
$P(S_1\cap S_2)=0,8$.

Les deux premières probabilités peuvent figurer dans l'arbre mais pas la troisième.

On peut alors en déduire deux autres probabilités par la loi des nœuds.



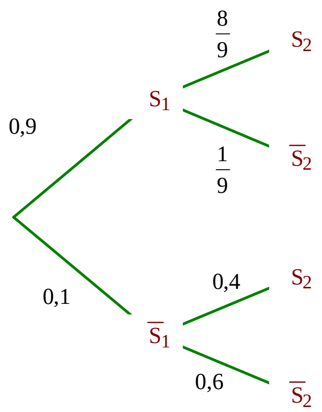
$$P(S_2/S_1)=\frac{P(S_1\cap S_2)}{P(S_1)}$$

$$=\frac{0,8}{0,9}$$

$$=\frac{8}{9}$$

2°) Calculer la probabilité que l'objet prélevé ne passe pas avec succès le deuxième contrôle.
On donnera la réponse sous forme décimale.

On peut compléter l'arbre fait au début de l'exercice.



On sait que S_1 et $\overline{S_1}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(\overline{S_2}\right)=P\left(S_1\cap\overline{S_2}\right)+P\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\right)$$

$$=P(S_1)\times P\left(\overline{S_2}/S_1\right)+P\left(\overline{S_1}\right)\times P\left(\overline{S_2}/\overline{S_1}\right)$$

$=0,9\times\frac{1}{9}+0,1\times0,6$ (on utilise les valeurs de l'arbre ; par exemple, la valeur $\frac{1}{9}$ qui s'obtient par la loi des nœuds : $\frac{1}{9}=1-\frac{8}{9}$)

$$=0,16$$

II.

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P) tels que $P(\mathrm{A}) = \dfrac{3}{5}$, $P(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}$ et $P(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{1}{3}$.

Calculer $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$.

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a : $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$.

On cherche $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Comme A et $\overline{\mathrm{A}}$ constituent un système complet d'événements, on a $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$.

En utilisant les données de l'énoncé, on calcule $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = P(\overline{\mathrm{A}}) \times P(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15}$.

On a donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) - P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{11}{30}$.

On en déduit la réponse à la question posée.

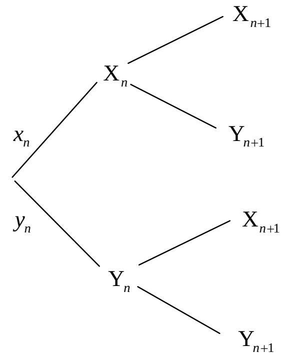
$$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{\frac{11}{30}}{\frac{3}{5}} = \frac{11}{30} \times \frac{5}{3} = \frac{11}{6 \times 3} = \frac{11}{18}$$

III.

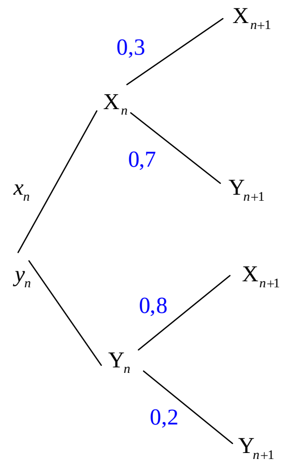
Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque seconde, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
On suppose que :
- si le mobile est dans la position A il y reste avec la probabilité 0,3 et il passe dans la position B avec la probabilité 0,7 ;
- si le mobile est dans la position B il y reste avec la probabilité 0,2 et il passe dans la position A avec la probabilité 0,8.

Pour tout entier naturel *n*, on note X_n l'événement « Le mobile est en A au bout de *n* secondes » et Y_n l'événement « Le mobile est en B au bout de *n* secondes ». De plus, on note x_n et y_n les probabilités respectives de ces deux événements X_n et Y_n.

Au brouillon, reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre en écrivant les probabilités conditionnelles sur les branches partant de X_n et Y_n sous forme décimale.



1°) À l'aide de l'arbre, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et y_n ainsi que y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.



X_n et Y_n constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(\mathrm{X}_{n+1}) = P(\mathrm{X}_{n+1} \cap \mathrm{X}_n) + P(\mathrm{X}_{n+1} \cap \mathrm{Y}_n)$ et $P(\mathrm{Y}_{n+1}) = P(\mathrm{Y}_{n+1} \cap \mathrm{X}_n) + P(\mathrm{Y}_{n+1} \cap \mathrm{Y}_n)$.

Ces égalités donnent :

$x_{n+1} = P(\mathrm{X}_n) \times P(\mathrm{X}_{n+1}/\mathrm{X}_n) + P(\mathrm{Y}_n) \times P(\mathrm{X}_{n+1}/\mathrm{Y}_n)$ et $y_{n+1} = P(\mathrm{X}_n) \times P(\mathrm{Y}_{n+1}/\mathrm{X}_n) + P(\mathrm{Y}_n) \times P(\mathrm{Y}_{n+1}/\mathrm{Y}_n)$.

On obtient $x_{n+1} = 0,3x_n + 0,8y_n$ et $y_{n+1} = 0,7x_n + 0,2y_n$.

2°) On suppose dans cette question que le mobile est initialement en A. On a donc $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.
Déterminer la probabilité que le mobile soit en A au bout de 2 secondes et que le mobile soit en B au bout de 2 secondes. On donnera les résultats sous forme décimale.

On calcule x_2 et y_2 grâce aux relations de récurrence précédentes.

On peut aussi utiliser un « gros » arbre de probabilités, mais cette méthode est vraiment pénible donc il vaut mieux l'éviter.

$x_0 = 1$	$y_0 = 0$
$x_1 = 0,3\times 1 + 0,8\times 0$ $= 0,3$	$y_1 = 0,2\times 0 + 0,7\times 1$ $= 0,7$
$x_2 = 0,3\times 0,3 + 0,8\times 0,7$ $= 0,65$	$y_2 = 0,2\times 0,7 + 0,7\times 0,3$ $= 0,35$

3°) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Après 4 secondes, le mobile a autant de chances d'être dans la position A que d'être dans la position B. »
Répondre en justifiant brièvement. On discutera suivant la position initiale du mobile.

1$^{\text{er}}$ cas : Le mobile est initialement en A.

Dans ce cas, on a $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

On reprend les calculs en utilisant les résultats précédents $x_2 = 0,65$ et $y_2 = 0,35$.

$x_3 = 0,3\times 0,65 + 0,8\times 0,35$ $= 0,475$	$y_3 = 0,2\times 0,35 + 0,7\times 0,35$ $y_3 = 0,525$
$x_4 = 0,5625$	$y_4 = 0,4375$

Dans ce cas, l'affirmation est fausse.

2$^{\text{e}}$ cas : Le mobile est initialement en B.

On refait les calculs avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
$x_1 = 0,8$	$y_1 = 0,2$
$x_2 = 0,4$	$y_2 = 0,6$
$x_3 = 0,6$	$y_3 = 0,4$
$x_4 = 0,5$	$y_4 = 0,5$

Dans ce cas, l'affirmation est vraie.

Pour gagner du temps, on peut rentrer les suites dans la calculatrice.

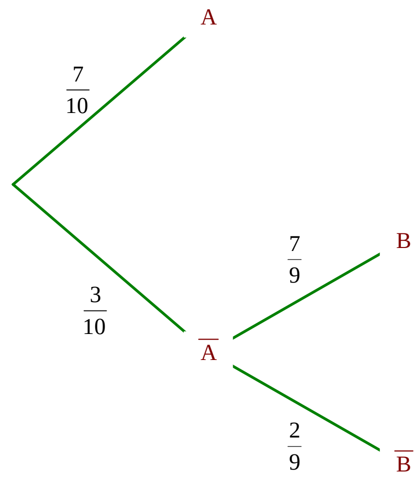
IV.

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public.
Dans une urne, se trouve placées 7 boules noires et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard. Si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si la boule est blanche, le joueur prend une deuxième boule (sans remettre la première boule tirée dans l'urne) et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée rapporte au joueur 1 € et chaque boule blanche 2 €.
Pour un jeu, le joueur paye 2 €. On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique en euros du joueur (c'est-à-dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

Au brouillon, faire un arbre de probabilités en utilisant les événements A : « Le joueur tire une boule noire au premier tirage » et B : « Le joueur tire une boule noire au deuxième tirage ».
On écrira les probabilités sous forme de fractions irréductibles.
On prendra garde que la boule tirée au premier tirage n'est pas remise dans l'urne.

1°) Donner la loi de probabilité de X dans un tableau.
On donnera sans justifier les probabilités sous forme de fractions irréductibles.

On note *P* la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.



X peut prendre les valeurs $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

x_i	-1	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$

$P(\mathrm{X}=-1)=P(\mathrm{A})$

$=\dfrac{7}{10}$

$P(\mathrm{X}=1)=P\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)$

$=P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times P\left(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}\right)$

$=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}$

$=0{,}21$

$P(\mathrm{X}=2)=P\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)$

$=P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{B}}/\overline{\mathrm{A}}\right)$

$=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}$

$=\dfrac{1}{15}$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 c'est-à-dire $P(\mathrm{X}=-1)+P(\mathrm{X}=1)+P(\mathrm{X}=2)=1$.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On attend deux lignes de calculs dans chaque cas.
On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=-\frac{7}{10}+\frac{7}{30}+\frac{2}{15}$$

$$=\frac{-21+7+4}{30}$$

$$=\frac{-10}{30}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

Pour le calcul de la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens (plus simple que la formule de définition).

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=(-1)^2\times\frac{7}{10}+1^2\times\frac{7}{30}+2^2\times\frac{1}{15}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\frac{7}{10}+\frac{7}{30}+\frac{4}{15}-\frac{1}{9}$$

$$=\frac{49}{45}$$

3°) Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques ; après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne.
Calculer la probabilité des événements U : « Le gain du joueur est nul » et V : « Le gain du joueur est strictement négatif ».
On donnera les valeurs exactes des résultats sous forme décimale.
Aucun détail des calculs n'est attendu.

On peut éventuellement faire un arbre de probabilités avec les différentes valeurs de X (1, – 1 et 2).

L'événement U est réalisé lorsque le joueur perd deux fois 1 euro et gagne une fois 2 euros.

On utilise l'indépendance des épreuves.

$$P(\mathrm{U})=P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=2)+P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=2)\times P(\mathrm{X}=-1)+P(\mathrm{X}=2)\times P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=-1)$$

$$=3\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{15}$$

$$=0{,}098$$

$$P(\mathrm{V})=P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=-1)+P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=1)\times P(\mathrm{X}=-1)+P(\mathrm{X}=1)\times P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=-1)$$
$$+P(\mathrm{X}=-1)\times P(\mathrm{X}=1)\times P(\mathrm{X}=-1)$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{7}{30}\times\frac{7}{10}+\frac{7}{30}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{7}{30}\times\frac{7}{10}$$

$$=\frac{343}{1000}+\frac{343}{1000}$$

$$=0{,}686$$

V.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x\mapsto \mathrm{e}^x+\dfrac{m}{\mathrm{e}^x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Déterminer m tel que la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse ln 2 soit parallèle à la droite L d'équation $y=1-x$.

On commence par calculer la dérivée de f_m.

Pour cela, on effectue une réécriture de $f_m(x)$: $f_m(x)=\mathrm{e}^x+m\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f_m'(x)=\mathrm{e}^x+m\left[-\frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\right]\quad\text{(on utilise la formule }\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}\text{)}$$

$$=\mathrm{e}^x-\frac{m\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\quad\text{(on ne cherche pas à arranger le résultat)}$$

Le coefficient directeur de L est égal à – 1.

On cherche m tel que $f_m'(\ln 2)=-1$ (1).

$$f_m'(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-\frac{m\mathrm{e}^{\ln 2}}{\left(\mathrm{e}^{\ln 2}+1\right)^2}$$

$$=2-\frac{2m}{9}\quad\text{(car }\mathrm{e}^{\ln 2}=2\text{ par définition du logarithme népérien)}$$

Ainsi,

$$(1) \Leftrightarrow 2-\frac{2m}{9}=-1$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{27}{2}$$

2°) En admettant que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$.

En déduire que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote horizontale Δ_m, dont on donnera une équation, en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1$ donc par limite d'un quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{m}{e^x+1}=m$.

Par limite d'une somme, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=m$.

D'après la limite précédente, on en déduit que $\mathcal{C}_m$ admet la droite Δ_m d'équation $y=m$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

Dans les questions 3°) et 4°), on suppose que m est un réel quelconque strictement supérieur à 1.

3°) Exprimer en fonction de m les coordonnées du point d'intersection J_m de $\mathcal{C}_m$ et de Δ_m.

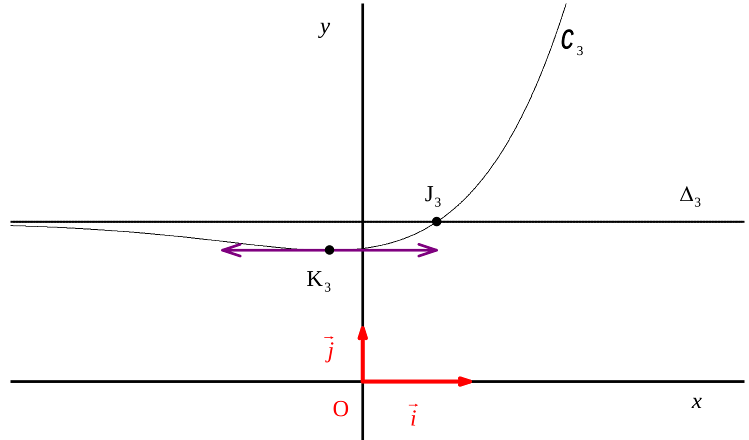
J_m a pour ordonnée m car J_m appartient à la droite Δ_m d'équation $y=m$.

L'abscisse de J_m est la solution de l'équation $f_m(x)=m \quad (2)$.

$$(2) \Leftrightarrow e^x+\frac{m}{e^x+1}=m$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}+e^x\cancel{+m}=me^x\cancel{+m}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}+e^x=me^x$$
$$\Leftrightarrow e^x=m-1 \text{ (on divise les deux membres de l'égalité par } e^x \text{ qui est non nul)}$$
$$\Leftrightarrow x=\ln(m-1) \quad (m-1>0 \text{ car } m>1 \text{ par hypothèse})$$

J_m a pour abscisse $\ln(m-1)$.

Ainsi $J_m\left(\ln(m-1)\,;\,m\right)$.



4°) Exprimer en fonction de m l'abscisse du point K_m de $\mathcal{C}_m$ en lequel la tangente est horizontale.

Démontrer que K_m appartient à la courbe Γ d'équation $y=2e^x+1$.

L'abscisse du point K_m est solution de l'équation $f_m'(x)=0 \quad (3)$.

$$(3) \Leftrightarrow e^x-\frac{me^x}{\left(e^x+1\right)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{m}{\left(e^x+1\right)^2}=0 \text{ (on divise les deux membres de l'égalité par } e^x \text{ qui est non nul)}$$
$$\Leftrightarrow \left(e^x+1\right)^2=m$$
$$\Leftrightarrow e^x+1=\sqrt{m} \text{ ou } e^x+1=-\sqrt{m} \quad (m>0 \text{ puisque } m>1 \text{ par hypothèse})$$
$$\Leftrightarrow e^x=\sqrt{m}-1 \text{ ou } e^x=-1-\sqrt{m} \text{ (impossible)}$$
$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\sqrt{m}-1\right) \quad (\sqrt{m}-1 \text{ puisque } m>1 \text{ par hypothèse})$$

K_m a pour abscisse $\ln\left(\sqrt{m}-1\right)$.

On calcule $f_m\left(\ln\left(\sqrt{m}-1\right)\right)$.

$$f_m\left(\ln\left(\sqrt{m}-1\right)\right)=e^{\ln\left(\sqrt{m}-1\right)}+\frac{m}{e^{\ln\left(\sqrt{m}-1\right)}+1}$$
$$=\sqrt{m}-1+\frac{m}{\sqrt{m}\cancel{-1}\cancel{+1}}$$
$$=\sqrt{m}-1+\frac{m}{\sqrt{m}}$$
$$=\sqrt{m}-1+\frac{\sqrt{m}\times\cancel{\sqrt{m}}}{\cancel{\sqrt{m}}}$$
$$=\sqrt{m}-1+\sqrt{m}$$
$$=2\sqrt{m}-1$$

K_m a pour ordonnée $2\sqrt{m}-1$.

$$2e^{x_{K_m}}+1=2e^{\ln\left(\sqrt{m}-1\right)}+1$$
$$=2\left(\sqrt{m}-1\right)+1$$
$$=2\sqrt{m}-1$$
$$=y_{K_m}$$

On en déduit que K_m appartient à la courbe Γ d'équation $y=2e^x+1$.

VI.

On pose $z=\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{3-\sqrt{2}}$.
Calculer le module de z.

$$|\,z\,|^2=\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=1\cancel{+\sqrt{2}}+3\cancel{-\sqrt{2}}$$
$$=4$$

Donc $|\,z\,|=2$.

VII.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À tout point M du plan P, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\left(|\,z\,|-2\right)\overline{z}$.
On note U et V les points d'affixes respectives 1 et i. Les deux questions sont indépendantes.

On commence par faire un graphique.

1°) Soit M un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
Recopier la proposition exacte.

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).
☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).
☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

$M\in\mathcal{C}$ par hypothèse donc $OM=1$ ce qui se traduit par $|\,z\,|=1$.

On a donc $z'=(1-2)\overline{z}$ ce qui donne $z'=-\overline{z}$.

Par conséquent, M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).

2°) a) Soit M un point quelconque de la demi-droite $[OV)$.
On note z son affixe et on pose $z=ib$ où b est un réel positif ou nul.
Exprimer z' en fonction de b.

$z'=\left(|\,ib\,|-2\right)\times\overline{ib}$

$=\left(|\,b\,|-2\right)\times(-ib)$ (on a : $|\,ib\,|=|\,i\,|\times|\,b\,|=|\,b\,|$; les parenthèses autour de $-ib$ sont obligatoires)

$=(b-2)\times(-ib)$ ($|\,b\,|=$ module de $b=$ valeur absolue de $b=b$ puisque $b\geqslant 0$ par hypothèse)

$=i\left(2b-b^2\right)$

b) Déterminer l'ensemble des point M' lorsque M décrit la demi-droite $[OV)$.
Après étude, on rédigera une conclusion selon le modèle suivant à recopier et à compléter :
« Lorsque M décrit la demi-droite $[OV)$, M' décrit … ».

Lorsque M décrit la demi-droite $[OV)$, b décrit $\mathbb{R}_+$.

D'après la question précédente, z' est un imaginaire pur.

Il nous faut donc étudier dans quel intervalle varie $2b-b^2$ lorsque b décrit $\mathbb{R}_+$.

On étudie pour cela les variations de la fonction $f: x\mapsto 2x-x^2$.

Comme f est une fonction polynôme du second degré, on peut dresser immédiatement le tableau de variations de f avec les limites.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	$-\infty$

Ainsi, lorsque b décrit $\mathbb{R}_+$, $2b-b^2$ décrit l'intervalle $]-\infty\,;1]$.

On en déduit que lorsque M décrit la demi-droite $[OV)$, M' décrit la demi-droite $[VO)$.