TS1

Contrôle du vendredi 22 décembre 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……..…… **Note :** …….. / 20

I. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à une population d'individus atteints par une maladie qui est provoquée soit par une bactérie, soit par un virus. On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
On précise que la maladie est d'origine bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si la maladie dont est atteint un individu est d'origine bactérienne ou virale, on dispose d'un test dont le résultat peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque la maladie est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :
• si la maladie est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;
• si la maladie est virale, le test est positif dans 10 % des cas.
On choisit au hasard un individu de la population.

1°) Faire ci-dessous au stylo un arbre de probabilités pondéré avec les événements A : « La maladie est d'origine bactérienne » et B : « Le test est positif ».
Calculer ensuite, en rédigeant, la probabilité que le test soit positif. On donnera la valeur exacte.

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

2°) Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
Quelle est la probabilité pour que la maladie soit d'origine bactérienne ? On donnera la valeur arrondie au millième.

…….. (un seul résultat, sans égalité)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Les candidats à un examen peuvent pour s'y présenter suivre la filière A ou la filière B.
Lors de la session 2016, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'examen avaient suivi la filière A. Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen.
Pour les candidats ayant suivi la filière B, le taux de réussite à l'examen était seulement de 55 %.

1°) On choisit au hasard l'un des candidats à l'examen.
Calculer la probabilité qu'il ait été reçu à l'examen. On attend la valeur exacte.

……. (un seul résultat sans égalité)

2°) On interroge 400 candidats au hasard à l'examen parmi ceux de 2016.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'intervalle de fluctuation « exact » au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.
On donnera la réponse sous la forme d'un intervalle (donc avec des crochets !) avec des bornes en écriture fractionnaire.

…… (une seule réponse, sans égalité)

III. (3 points)

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).
On suppose que :
• A et B sont indépendants ;
• $P(\mathrm{A}) = 0,6$;
• $P(\mathrm{B}) = 0,5$.
Calculer $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. On attend le détail de la démarche.

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 2 points)

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule rouge, trois boules jaunes et n boules bleues (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1), toutes indiscernables au toucher.
Le joueur tire une boule du sac.
• Si la boule tirée est rouge, il reçoit 1 € ;
• Si la boule tirée est bleue, il perd 1 €.
• Si la boule tirée est jaune, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

1°) Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où P désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Faire les traits de fractions à la règle.

x_i	1	– 1	0
$P(\mathrm{X} = x_i)$			

2°) Exprimer l'espérance et la variance de X en fonction de n sous la forme d'un seul quotient simplifié.
On écrira les formules en situation.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On sait que la probabilité pour qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon aléatoire de 1000 personnes.
On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire et on appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon. » ;
B : « Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon. ».
On donnera les valeurs arrondies au millième.

……

……

……

……

……

……

……

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
On laissera la trace des formules utilisées.

……

……

……

……

……

……

Conseils donnés à l'oral

I. Avant de faire les calculs, faire une phrase et donner le nom de la formule utilisée.

II. 2°) On écrira l'intervalle avec des crochets.

IV. 2°) Formules en situation.

V. Faire des phrases :

« La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{A})$ est … » (mieux que $P(\mathrm{A}) \approx ....$).

« La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{B})$ est … ».
On se gardera d'écrire :

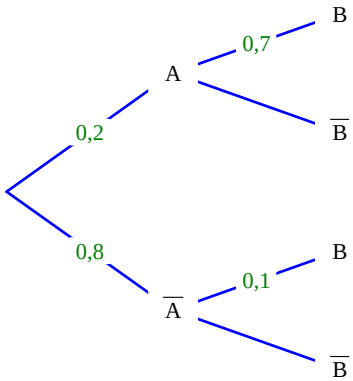
Corrigé du contrôle du 22-12-2017

I.

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à une population d'individus atteints par une maladie qui est provoquée soit par une bactérie, soit par un virus. On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
On précise que la maladie est d'origine bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si la maladie dont est atteint un individu est d'origine bactérienne ou virale, on dispose d'un test dont le résultat peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque la maladie est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :
• si la maladie est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;
• si la maladie est virale, le test est positif dans 10 % des cas.
On choisit au hasard un individu de la population.

1°) Faire ci-dessous au stylo un arbre de probabilités pondéré avec les événements A : « La maladie est d'origine bactérienne » et B : « Le test est positif ».
Calculer ensuite, en rédigeant, la probabilité que le test soit positif. On donnera la valeur exacte.

On écrit les probabilités sur les branches sous forme décimale.



On sait que A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P(B/A) + P(\overline{A}) \times P(B/\overline{A}) \quad (\text{car } P(A) \neq 0 \text{ et } P(\overline{A}) \neq 0)$$

$$= 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,1$$

$$= 0,22$$

2°) Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
Quelle est la probabilité pour que la maladie soit d'origine bactérienne ? On donnera la valeur arrondie au millième.

0,636 (un seul résultat, sans égalité)

On cherche la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0,7 \times 0,2}{0,22}$$

$$= \frac{7 \times 2}{22}$$

$$= \frac{7}{11}$$

$$\frac{7}{11} = 0,636363636...$$

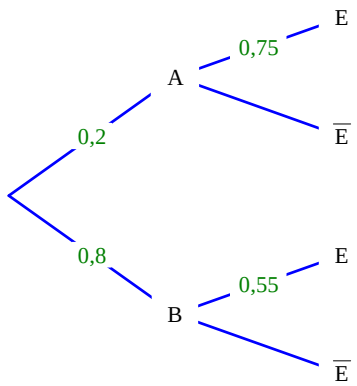
II.

Les candidats à un examen peuvent pour s'y présenter suivre la filière A ou la filière B.
Lors de la session 2016, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'examen avaient suivi la filière A. Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen.
Pour les candidats ayant suivi la filière B, le taux de réussite à l'examen était seulement de 55 %.

1°) On choisit au hasard l'un des candidats à l'examen.
Calculer la probabilité qu'il ait été reçu à l'examen. On attend la valeur exacte.

0,59 (un seul résultat sans égalité)

On dresse un arbre de probabilités avec les événements
A : « Le candidat a suivi la filière A » ;
B : « Le candidat a suivi la filière B » ;
E : « Le candidat est reçu à l'examen ».



A et B forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + P(\mathrm{E} \cap \overline{\mathrm{A}})$$

$$= P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{E}/\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{E}/\mathrm{B}) \quad (\text{car } P(\mathrm{A}) \neq 0 \text{ et } P(\mathrm{B}) \neq 0)$$

$$= 0,2 \times 0,75 + 0,8 \times 0,55$$

$$= 0,59$$

2°) On interroge 400 candidats au hasard à l'examen parmi ceux de 2016.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'intervalle de fluctuation « exact » au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.
On donnera la réponse sous la forme d'un intervalle (donc avec des crochets !) avec des bornes en écriture fractionnaire.

$$\left[\frac{217}{400} ; \frac{255}{400}\right] \text{ (une seule réponse, sans égalité)}$$

On note X le nombre de candidats reçus.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,59$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $P(\mathrm{X} \leqslant a) > 0,025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $P(\mathrm{X} \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Autre manière de rédiger :

On note F la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,59$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $\mathrm{F}(a) > 0,025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $\mathrm{F}(b) \geqslant 0,975$.

Sur la calculatrice, on rentre la fonction : $\mathrm{Y1} = \mathrm{binomFRép}(400, 0.59, \mathrm{X})$.
On définit un pas de table de 1 et $\mathrm{Xmin} = 0$.
On trouve $a = 217$ et $b = 255$.

Donc l'intervalle de fluctuation « exact » au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus est $\left[\frac{217}{400} ; \frac{255}{400}\right]$.

Il est inutile de simplifier les bornes.

On constate que cet intervalle contient bien la probabilité $p = 0,59 = \frac{59}{100} = \frac{236}{400}$ et est centré en p.

Son amplitude est de $\frac{38}{400}$.

Avec la calculatrice, on vérifie que On vérifie par le calcul que $P(\mathrm{X} \in [217 ; 255])$ soit $P(217 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 255)$ est voisine de 0,95, en étant légèrement supérieure.

On a : $P(217 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 255) = P(\mathrm{T} \leqslant 255) - P(\mathrm{T} \leqslant 216)$.

Avec la calculatrice, on obtient : $P(217 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 255) = 0,952708094...$ (l'affichage est : 0,9527080943).

Pour résoudre la question, on peut aussi utiliser la commande invBinom((faire 2nde var (distrib).
On utilise la commande invBinom((faire 2nde var (distrib).

Aire : 0.025 nbreEssais : 400 p : 0.59 coller invBinom(0.025,400,0.59) puis entrer On trouve 217.	Aire : 0.975 nbreEssais : 400 p : 0.59 coller invBinom(0.975,400,0.59) puis entrer On trouve 255.

III.

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).
On suppose que :
- A et B sont indépendants ;
- $P(\mathrm{A}) = 0,6$;
- $P(\mathrm{B}) = 0,5$.

Calculer $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. On attend le détail de la démarche.

On a : $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (formule générale).

Comme A et B sont deux événements indépendants pour P par hypothèse, on a donc
$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$.

Grâce aux valeurs de $P(\mathrm{A})$ et de $P(\mathrm{B})$ données dans l'énoncé, on obtient :

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,6 + 0,5 - 0,6 \times 0,5$$

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1,1 - 0,3$$

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,8$$

IV.

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule rouge, trois boules jaunes et n boules bleues (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1), toutes indiscernables au toucher.
Le joueur tire une boule du sac.
• Si la boule tirée est rouge, il reçoit 1 € ;
• Si la boule tirée est bleue, il perd 1 €.
• Si la boule tirée est jaune, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

1°) Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où P désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Faire les traits de fractions à la règle.

x_i	1 (rouge)	– 1 (bleue)	0 (jaune)
$P(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{n+4}$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$

Le nombre total de boules est $1+3+n = n+4$.

2°) Exprimer l'espérance et la variance de X en fonction de n sous la forme d'un seul quotient simplifié.
On écrira les formules en situation.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1\times\frac{1}{n+4} + (-1)\times\frac{n}{n+4} + 0\times\frac{3}{n+4}$$

$$= \frac{1}{n+4} - \frac{n}{n+4}$$

$$= \frac{1-n}{n+4}$$

Pour le calcul de la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens (la formule de la définition conduit à beaucoup de calculs).

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 1^2\times\frac{1}{n+4} + (-1)^2\times\frac{n}{n+4} + 0^2\times\frac{3}{n+4} - \left(\frac{1-n}{n+4}\right)^2$$

$$= \frac{1+n}{n+4} - \left(\frac{1-n}{n+4}\right)^2$$

$$= \frac{1+n}{n+4} - \frac{(1-n)^2}{(n+4)^2}$$ (on ne développe surtout pas le dénominateur $(n+4)^2$)

$$= \frac{(1+n)(n+4)-(1-n)^2}{(n+4)^2}$$ (le dénominateur commun est $(n+4)^2$)

$$= \frac{n^2+5n+4-(1-2n+n^2)}{(n+4)^2}$$

$$= \frac{7n+3}{(n+4)^2}$$

V.

On sait que la probabilité pour qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon aléatoire de 1000 personnes.
On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire et on appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon. » ;
B : « Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon. ».
On donnera les valeurs arrondies au millième.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,001$.

• A est l'événement $(\mathrm{X} = 2)$ donc $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{X} = 2)$.

On utilise directement la calculatrice (commande binompdf ou binomfdp).

On obtient l'affichage : $\boxed{0.1840317441}$.

Ainsi, la valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{A})$ est 0,184.

> Attention, on n'écrit pas $P(\mathrm{A}) = 0,184$.
> Le signe = ne convient pas.
>
> La formule de la loi binomiale donne $P(\mathrm{A}) = \binom{1000}{2}\times 0,001^2\times(1-0,001)^{1000-2}$.

• B est l'événement $(X \geqslant 2)$ donc $P(B) = P(X \geqslant 2)$.

On écrit $P(B) = 1 - P(X \leqslant 1)$ ce qui permet d'utiliser directement la calculatrice (commande binomcdf ou binomFrép).

On obtient l'affichage : $\boxed{.2642410849}$.

Ainsi, la valeur arrondie au millième de $P(B)$ est 0,264.

On peut aussi écrire $P(B) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right]$. Cette méthode est cependant un peu maladroite.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
On laissera la trace des formules utilisées.

On applique les formules du cours.

$$E(X) = np$$

$$= 1000 \times 0,001$$

$$= 1$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

$$= 1000 \times 0,001 \times 0,999$$

$$= 0,999$$