TS spé

Contrôle du mardi 12 décembre 2017 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On note E l'ensemble des entiers relatifs congrus à – 3 modulo 14.

1°) Recopier et compléter la phrase suivante : « Les éléments de E sont les entiers relatifs de la forme …… avec $k \in \mathbb{Z}$ ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Quel est le plus grand élément de E inférieur ou égal à 2017 ?

……………………. (une seule réponse, sans égalité)

3°) Quel est le plus petit élément de E supérieur ou égal à – 2017 ?

……………………. (une seule réponse, sans égalité)

4°) Cette question n'a pas de lien avec les questions précédentes.
Soit n un élément quelconque de E. Quel est le reste de la division euclidienne de n^3 par 14 ? Justifier.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (2 points)

Soit a un entier relatif tel que $a \equiv -3$ (mod. 12).
Démontrer en utilisant les propriétés des congruences que $9-a$ est divisible par 12.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (3 points)

Le but de cet exercice est de déterminer les entiers relatifs x vérifiant la condition (C) : $x^2+1 \equiv 0$ (mod. 5).

• Faire dans l'espace vide ci-dessous, sans justifier, un tableau de congruences modulo 5. Il n'y a rien à justifier.

• Compléter la phrase suivante :

Les entiers vérifiant la condition (C) sont les entiers congrus à …………………….. modulo 5.

IV. (8 points : 1°) 4 points ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)

Le but de l'exercice est de démontrer à l'aide des congruences que pour tout entier naturel n le nombre $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7.

Dans les questions 1°) et 2°), on fixe donc un entier naturel n.
On travaille en congruences modulo 7.

1°) Justifier brièvement que $5^{3}\equiv -1$ (mod. 7). À l'aide de ce résultat, recopier et compléter par le plus petit entier naturel la relation $5^{6}\equiv ....$ (mod. 7) puis en justifiant la relation $5^{6n}\equiv ....$ (mod. 7) ainsi que la relation $5^{6n+1}\equiv ....$ (mod. 7).

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Reprendre la démarche de la question précédente en l'adaptant pour 2^{3n+1}.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) Conclure.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Conseils donnés à l'oral pendant le contrôle

● Un tableau de congruences comprend toujours deux lignes.

● Le symbole d'équivalence est interdit. On rédigera en utilisant les mots « donc », « d'où » … ainsi que les expressions « par conséquent », « par suite »…

Corrigé du contrôle du 12-12-2017

I.

On note E l'ensemble des entiers relatifs congrus à – 3 modulo 14.

1°) Recopier et compléter la phrase suivante : « Les éléments de E sont les entiers relatifs de la forme …… avec $k \in \mathbb{Z}$ ».

Les éléments de E sont les entiers relatifs de la forme $14k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On peut aussi répondre « Les éléments de E sont les entiers relatifs de la forme $11 + 14k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ».
C'est cependant un peu moins logique.

2°) Quel est le plus grand élément de E inférieur ou égal à 2017 ?

2013 (une seule réponse, sans égalité)

Pour trouver ce nombre, on cherche le plus grand entier relatif k tel que $14k - 3 \leqslant 2017$ (1).

$(1) \Leftrightarrow k \leqslant \dfrac{2020}{14}$

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{2020}{14} = 144,285...$.

Le plus grand entier relatif k pour lequel (1) est vérifié est 144.

On remplace alors k par cette valeur dans l'expression $14k - 3$.

On obtient $14 \times 144 - 3 = 2013$.

On peut aussi procéder par essais successifs avec la calculatrice ou faire un programme sur calculatrice.

3°) Quel est le plus petit élément de E supérieur ou égal à – 2017 ?

– 2005 (une seule réponse, sans égalité)

4°) Cette question n'a pas de lien avec les questions précédentes.
Soit n un élément quelconque de E. Quel est le reste de la division euclidienne de n^3 par 14 ? Justifier.

Par hypothèse, $n \in E$ donc $n \equiv -3$ (mod. 14).

On a donc : $n^3 \equiv (-3)^3$ (mod. 14).

Or $(-3)^3 \equiv 1$ (mod. 14).

Par suite, $n^3 \equiv 1$ (mod. 14).

Comme $0 \leqslant 1 < 14$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de n^3 par 14 est égal à 1.

II.

Soit a un entier relatif tel que $a \equiv -3$ (mod. 12).
Démontrer en utilisant les propriétés des congruences que $9 - a$ est divisible par 12.

On a $a \equiv -3$ (mod. 12) donc, en multipliant les deux membres de la relation par – 1, $-a \equiv 3$ (mod. 12).

On additionne ensuite 9 aux deux membres de la relation.

On obtient $9 - a \equiv 12$ (mod. 12).
Or $12 \equiv 0$ (mod. 12).

Donc par transitivité de la relation de congruence, on obtient $9 - a \equiv 0$ (mod. 12).

On en déduit que $9 - a$ est divisible par 12.

III.

Le but de cet exercice est de déterminer les entiers relatifs x vérifiant la condition (C) : $x^2 + 1 \equiv 0$ (mod. 5).

• Faire dans l'espace vide ci-dessous, sans justifier, un tableau de congruences modulo 5. Il n'y a rien à justifier.

Si $x \equiv \ldots$ (mod. 5)	0	1	2	3	4
Alors $x^2 + 1 \equiv \ldots$ (mod. 5)	1	2	0	0	2

• Compléter la phrase suivante :

Les entiers vérifiant la condition (C) sont les entiers congrus à $\boxed{\text{2 ou à 3}}$ modulo 5.

IV.

Le but de l'exercice est de démontrer à l'aide des congruences que pour tout entier naturel n le nombre $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

Dans les questions 1°) et 2°), on fixe donc un entier naturel n.
On travaille en congruences modulo 7.

1°) Justifier brièvement que $5^3 \equiv -1$ (mod. 7). À l'aide de ce résultat, recopier et compléter par le plus petit entier naturel la relation $5^6 \equiv ....$ (mod. 7) puis en justifiant la relation $5^{6n} \equiv ....$ (mod. 7) ainsi que la relation $5^{6n+1} \equiv ....$ (mod. 7).

On a que $5 \equiv -2$ (mod. 7).

On a donc $5^3 \equiv (-2)^3$ (mod. 7) soit $5^3 \equiv -8$ (mod. 7).

Or $-8 \equiv -1$ (mod. 7) d'où $5^3 \equiv -1$ (mod. 7).

En élevant les deux membres de cette dernière relation au carré, on obtient $5^6 \equiv 1$ (mod. 7).

Puis en élevant les deux membres à l'exposant *n*, on obtient la relation $5^{6n} \equiv 1^n$ (mod. 7) et comme $1^n = 1$, on a :
$5^{6n} \equiv 1$ (mod. 7).

En multipliant les deux membres de la relation par 5, on obtient la relation $5^{6n+1} \equiv 5$ (mod. 7).

2°) Reprendre la démarche de la question précédente en l'adaptant pour 2^{3n+1}.

On a que $2^3 = 8$.

Or $8 \equiv 1$ (mod. 7) d'où $2^3 \equiv 1$ (mod. 7).

En élevant les deux membres à l'exposant *n*, on obtient la relation $2^{3n} \equiv 1^n$ (mod. 7) et comme $1^n = 1$, on a :
$2^{3n} \equiv 1$ (mod. 7).

En multipliant les deux membres de la relation par 2, on obtient la relation $2^{3n+1} \equiv 2$ (mod. 7).

3°) Conclure.

Soit *n* un entier naturel fixé.

On a démontré que $5^{6n+1} \equiv 5$ (mod. 7) et que $2^{3n+1} \equiv 2$ (mod. 7).

Par addition membre à membre de ces deux relations, on obtient $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 7$ (mod. 7).

Or $7 \equiv 0$ (mod. 7).

Donc par transitivité de la relation de congruence, on obtient $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0$ (mod. 7).

On en déduit que pour tout entier naturel *n* le nombre $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.