TS1

Contrôle du vendredi 8 décembre 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..……………

Note : ……../ **20**

I. (2 points)

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On précise de plus que tous les termes de (v_n) sont strictement négatifs.

Recopier très lisiblement et compléter l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = ...$.

……………………………………………

II. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{n+1} - 2^n}{3^n}$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Effectuer une transformation d'écriture adaptée. On attend une expression simplifiée au maximum.
Déterminer la limite de (u_n). On attend une justification très précise avec une présentation correcte.

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Déterminer à l'aide d'un encadrement la limite de (u_n).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}\setminus\{0\,;1\}$ par $v_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

Déterminer la limite de (v_n) en utilisant le résultat du 1°).

………

………

………

………

………

IV. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

………

………

………

………

………

………

………

………

V. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(e^n - 2e^{-n}\right)^2 - \left(e^n - e^{-n}\right)^2$ pour tout entier naturel n.

Transformer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

………

………

………

………

………

………

VI. (2 points)

On considère la propriété suivante :

> Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ qui converge vers un réel ℓ.
>
> On se propose de démontrer que si $\ell > 0$, alors tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain indice.

On donne ci-dessous dans le désordre les éléments de la démonstration de cette propriété à partir des deux hypothèses « (u_n) converge vers ℓ » et « $\ell > 0$ » en s'appuyant sur la définition d'une suite converge vers un réel. Pour comprendre la démonstration, il est conseillé de faire un schéma en faisant par exemple une représentation de la droite réelle.

① Comme I est inclus dans $]0\,;+\infty[$, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \in\,]0\,;+\infty[$.

② Comme $\ell > 0$ par hypothèse, il existe un intervalle ouvert I contenant ℓ inclus dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

③ Ainsi tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs à partir de l'indice N.

④ On sait que (u_n) converge vers ℓ par hypothèse donc on peut trouver un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

Remettre la démonstration dans l'ordre (sans justifier).

………………………………………………………………………………………

VII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n on ait $u_n \leqslant \dfrac{2n}{n+1}$.

1°) Démontrer que (u_n) est majorée.

2°) On suppose de plus que (u_n) est croissante. Que peut-on en déduire pour le comportement asymptotique de (u_n) ? Citer précisément le théorème utilisé.

………

………

………

………

………

………

Indications pour la rédaction

Présentation des calculs (exercices II, IV et V) :

On pense à bien « quantifier » les égalités.

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

Cette remarque est valable pour les inégalités (exercices **III** et **VII**).

Présentation des calculs de limites (exercices II, IV, V…) :

Dans l'exemple qui suit, on cherche la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + n$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(3n^2\right) = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme, } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Phrase de rédaction-type pour la réponse à la question VII. 1°)

« On en déduit que (u_n) est majorée par … ».

Consignes générales

● Les tables doivent être disposées en « position contrôle commun ».

● Vous devez écrire au stylo à plume très lisiblement et sans ratures. Aucune réponse écrite au critérium ne sera prise en compte.

● Vous ne devez rien écrire ni surligner sur l'énoncé en dehors des réponses attendues.

● À la sonnerie, vous devez impérativement poser le stylo et rester en silence.
Les copies seront ramassées immédiatement.
Des points seront retirés aux élèves qui continuent à rédiger ou qui se mettent à parler.

Corrigé du contrôle du 8-12-2017

I.

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On précise de plus que tous les termes de (v_n) sont strictement négatifs.

Recopier très lisiblement et compléter l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = ...$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = -\infty$$

- Il ne s'agit pas d'une FI.
- On peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^-$.
- On n'écrit pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{+\infty}{0^-}$.
- Le signe – provient des signes + et du signe – et de la règle du signe d'un quotient (+ sur – égale –).

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n}$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Effectuer une transformation d'écriture adaptée. On attend une expression simplifiée au maximum.
Déterminer la limite de (u_n). On attend une justification très précise avec une présentation correcte.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^{n+1}}{3^n} - \frac{2^n}{3^n}$$

$$= 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

III.

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Déterminer à l'aide d'un encadrement la limite de (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ [attention : inégalités larges] donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ (on a divisé tous les membres de la double inégalité par n qui est strictement positif donc le sens des inégalités ne change pas).

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}\setminus\{0\,;1\}$ par $v_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

Déterminer la limite de (v_n) en utilisant le résultat du 1°).

Pour conjecturer la limite, on rentre la suite dans la calculatrice.

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\,;1\} \quad v_n = \dfrac{1-\dfrac{(-1)^n}{n}}{1+\dfrac{(-1)^n}{n}}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\,;1\} \quad v_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une différence } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(e^n - 2e^{-n}\right)^2 - \left(e^n - e^{-n}\right)^2$ pour tout entier naturel n.

Transformer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \cancel{e^{2n}} - 4e^n \times e^{-n} + 4e^{-2n} - \cancel{e^{2n}} + 2e^n \times e^{-n} - e^{-2n}$ (on développe en utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2$ …)

$$= -4e^0 + 3e^{-2n} + 2e^0$$

$$= -4 + 3e^{-2n} + 2$$

$$= 3 \times \left(e^{-2}\right)^n - 2$$

$-1 < e^{-2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(e^{-2}\right)^n = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$.

VI.

On considère la propriété suivante :

> Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ qui converge vers un réel ℓ.
>
> On se propose de démontrer que si $\ell > 0$, alors tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain indice.

On donne ci-dessous dans le désordre les éléments de la démonstration de cette propriété à partir des deux hypothèses « (u_n) converge vers ℓ » et « $\ell > 0$ » en s'appuyant sur la définition d'une suite converge vers un réel.
Pour comprendre la démonstration, il est conseillé de faire un schéma en faisant par exemple une représentation de la droite réelle.

① Comme I est inclus dans $]0\,;+\infty[$, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \in]0\,;+\infty[$.

② Comme $\ell > 0$ par hypothèse, il existe un intervalle ouvert I contenant ℓ inclus dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

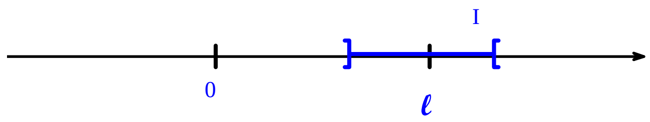
③ Ainsi tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs à partir de l'indice N.

④ On sait que (u_n) converge vers ℓ par hypothèse donc on peut trouver un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

Remettre la démonstration dans l'ordre (sans justifier).

② ; ④ ; ① ; ③

On doit d'abord introduire l'intervalle I d'où l'ordre ② puis ④ et non ④ puis ②.



VII.

Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n on ait $u_n \leqslant \dfrac{2n}{n+1}$.

1°) Démontrer que (u_n) est majorée.

2°) On suppose de plus que (u_n) est croissante. Que peut-on en déduire pour le comportement asymptotique de (u_n) ? Citer précisément le théorème utilisé.

1°) Par définition, un majorant est un nombre indépendant de n qui est supérieur ou égal à tous les termes de la suite.
On cherche donc un nombre fixe, indépendant de n, qui majore tous les termes de la suite.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n < n+1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n}{n+1} < 1$ (on a divisé les deux membres par $n+1$ qui est strictement positif donc le sens de l'inégalité ne change pas).

On peut donc écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{2n}{n+1} < 2$ (on a multiplié les deux membres par 2 qui est strictement positif donc le sens de l'inégalité ne change pas).

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 2$.

2 est un nombre fixe, indépendant de n.

Par conséquent, la dernière inégalité prouve que la suite (u_n) est majorée par 2.

On notera que l'on ne peut pas dire que $\dfrac{2n}{n+1}$ est un majorant de u_n car un majorant ne doit pas dépendre de n (beaucoup d'élèves ont commis l'erreur).

2°) (u_n) est croissante et majorée.
Or toute suite croissante majorée converge.
Donc (u_n) converge.