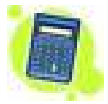
TS1

Contrôle du vendredi 1er décembre 2017 (50 minutes)



Prénom et nom : ……………………………………………………………

Note : ……. / 20

I. (2 points)

Soit a et b deux réels quelconques. Démontrer que $\sqrt{\dfrac{e^{2a^2+b^2}\times e^{ab}}{e^{-ab}\times e^{a^2}}}=e^{\frac{(a+b)^2}{2}}$.

………

………

………

………

………

………

………

II. (3 points)

On considère la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+e^{x-a}}$ définie sur $\mathbb{R}$ où a est un réel fixé.

Démontrer que f_a est une fonction constante.

………

………

………

………

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $1-\dfrac{e^x-1}{2}\leqslant 0$ (1) et $e^x-e^{x+1}\geqslant 1-e$ (2).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (1 point)

Écrire la solution de l'équation $2-(e^x-1)^3=0$.

………………………… (un seul résultat en valeur exacte sans égalité)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}\text{e}^x$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1°) Calculer $f\,'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad f\,'(x) =$ .... (un seul résultat sous forme factorisée au maximum)

2°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f\,'(x)$ et les variations de *f*.
On utilisera la règle pour les flèches de variations.
Faire une phrase pour décrire les variations de *f* sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

....

....

VI. (3 points)

Démontrer que la fonction $\text{F} : x \mapsto x + \dfrac{4}{\text{e}^x + 1}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x + 1}\right)^2$ sur $\mathbb{R}$. Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.

On pourra se contenter des grandes étapes de calcul. On fera très attention à la rédaction et aux notations.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

VII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas l'expression de F.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{G}(x) = \text{F}\left(\text{e}^x\right)$.

1°) Calculer $\text{G}\,'(x)$ (*x* étant un réel quelconque).

2°) Calculer $\text{G}\,'(\ln 3)$. On attend le détail des calculs.

....

....

....

....

....

....

Indications pour la rédaction et la présentation

I.

• Commencer par écrire : « Posons $\mathrm{A}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2a^2+b^2}\times\mathrm{e}^{ab}}{\mathrm{e}^{-ab}\times\mathrm{e}^{a^2}}}$. »

• Présenter ensuite les calculs sous la forme suivante :

$\mathrm{A}=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

II.

• Commencer directement en présentant les calculs sous la forme suivante :

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_a(x)=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

• Conclure par la phrase : « On en déduit que la fonction f_a est constante ».

III.

On adoptera la présentation classique de résolution sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

$(1)\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=$ ....

V.

1°) Donner le résultat de la dérivée sous forme factorisée au maximum.
Faire le trait de fraction à la règle.

VI.

• Commencer par écrire la phrase suivante : « D'après les règles d'opérations sur les fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».

• Faire ensuite le calcul directement sans phrase introductive.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}'(x)=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

• Rédiger ensuite une phrase de conclusion sur le modèle suivant [on notera que l'on écrit F et non $\mathrm{F}(x)$, f et non $f(x)$] : « On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. »

VII.

1°) Il faut commencer par exprimer G comme une composée de deux fonctions.

G est la composée de la fonction $u : x\mapsto \mathrm{e}^x$ suivie de la fonction F.

Comme u et F sont dérivables sur $\mathbb{R}$, G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On applique la formule de dérivation d'une composée :

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{G}'(x)=$ .... (résultat gardant la trace de la formule utilisée)

$=$ .... (résultat « arrangé »)

2°) On présentera les calculs en colonne en détaillant bien toutes les étapes.
Les résultats dont les calculs seraient mal ou insuffisamment justifiés ne seront pas pris en compte.

$\mathrm{G}'(\ln 3)=$ ....

$=$ ....

Corrigé du contrôle du 1-12-2017

I.

Soit a et b deux réels quelconques. Démontrer que $\sqrt{\dfrac{e^{2a^2+b^2}\times e^{ab}}{e^{-ab}\times e^{a^2}}}=e^{\frac{(a+b)^2}{2}}$.

Posons $A=\sqrt{\dfrac{e^{2a^2+b^2}\times e^{ab}}{e^{-ab}\times e^{a^2}}}$.

$$A=\sqrt{\frac{e^{2a^2+b^2+ab}}{e^{a^2-ab}}}$$

$$=\sqrt{e^{2a^2+b^2+ab-a^2+ab}}$$

$$=\sqrt{e^{a^2+2ab+b^2}}$$

$$=\sqrt{e^{(a+b)^2}}$$

$$=e^{\frac{(a+b)^2}{2}}\quad (\text{car } \forall x\in\mathbb{R}\quad \sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}})$$

II.

On considère la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+e^{x-a}}$ définie sur $\mathbb{R}$ où a est un réel fixé.
Démontrer que f_a est une fonction constante.

On transforme l'expression de $f_a(x)$ de manière à obtenir un résultat qu ne dépend pas de x.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_a(x)=\frac{e^x}{e^x\left(1+e^{-a}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^{-a}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+e^{-a}}$$ (on ne peut pas aller plus loin ; on peut éventuellement écrire $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$)

Or a est un réel fixé donc on en déduit que la fonction f_a est constante.

Une autre méthode, maladroite mais possible, consisterait à calculer la dérivée de f_a et à démontrer que celle-ci est nulle. Cependant, à ce stade de l'année, nous n'avons pas encore étudié comment dériver la fonction $x\mapsto e^{x-a}$ et, par conséquent, nous ne savons pas encore dériver f_a.

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $1-\dfrac{e^x-1}{2}\leqslant 0\quad(1)$ et $e^x-e^{x+1}\geqslant 1-e\quad(2)$.

$(1)\Leftrightarrow 2-\left(e^x-1\right)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow 2-e^x+1\leqslant 0$

$\Leftrightarrow 3-e^x\leqslant 0$

$\Leftrightarrow e^x\geqslant 3$

$\Leftrightarrow x\geqslant \ln 3$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1=[\ln 3\,;+\infty[$$

$(2)\Leftrightarrow e^x-e^x\times e\geqslant 1-e$

$\Leftrightarrow e^x(1-e)\geqslant 1-e$

$\Leftrightarrow e^x\leqslant \dfrac{1-e}{1-e}$ (on change le sens car $1-e<0$)

$\Leftrightarrow e^x\leqslant 1$

$\Leftrightarrow x\leqslant 0$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=]-\infty\,;0]$$

On peut retrouver graphiquement ce résultat sur l'écran de la calculatrice.

IV.

Écrire la solution de l'équation $2-\left(e^x-1\right)^3=0$.

$\ln\left(1+\sqrt[3]{2}\right)$ (un seul résultat en valeur exacte sans égalité)

$$(1) \Leftrightarrow \left(e^x - 1\right)^3 = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = \sqrt[3]{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 + \sqrt[3]{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(1 + \sqrt[3]{2}\right)$$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1} e^x$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} e^x$$ (un seul résultat sous forme factorisée au maximum)

On commence par dériver la fonction $u : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$.

On utilise la formule de dérivation d'une fonction homographique ou d'un quotient.

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

On applique la formule de dérivation d'un produit.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \times e^x + \frac{x}{x+1} \times e^x$$

$$= \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1}\right) \times e^x$$

$$= \frac{1 + x(x+1)}{(x+1)^2} e^x$$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} e^x$$

2°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
On utilisera la règle pour les flèches de variations.
Faire une phrase pour décrire les variations de *f* sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $x^2 + x + 1$		$+$		$+$	
Signe de e^x		$+$		$+$	
Signe de $(x+1)^2$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
Variations de *f*	0	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

Le polynôme $x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant strictement négatif.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x + 1 > 0$.

f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.

VI.

Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x + \dfrac{4}{e^x + 1}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ sur $\mathbb{R}$. Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.

On pourra se contenter des grandes étapes de calcul. On fera très attention à la rédaction et aux notations.

D'après les règles d'opérations sur les fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour dériver rapidement, on effectue la réécriture : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 1 + 4 \times \dfrac{1}{e^x + 1}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = 1 + 4 \times \left(-\frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} \right)$$

$$= 1 - 4\frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 - 4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1\right) - 4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2$$

$$= f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

VII.

Soit F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas l'expression de F.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}\left(\mathrm{e}^x\right)$.

1°) Calculer $\mathrm{G}'(x)$ (x étant un réel quelconque).

2°) Calculer $\mathrm{G}'(\ln 3)$. On attend le détail des calculs.

1°)

On sait que F est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \mathrm{F}'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

On utilise la formule de dérivation d'une composée : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\left[u(x)\right]$.

La fonction G est la composée de la fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$ suivie de la fonction F. Autrement dit, $\mathrm{G} = \mathrm{F} \circ u$ ou encore $\mathrm{G} = \mathrm{F} \circ \exp$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{G}"] & u(x) & \\ & X \arrow[r, mapsto, "\mathrm{F}"] & \mathrm{F}(X) \end{tikzcd}$$

La dérivée de la fonction u est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}'(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{F}'\left(\mathrm{e}^x\right)$$

$$= \mathrm{e}^x \times \frac{\mathrm{e}^x}{1+\left(\mathrm{e}^x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}{1+\left(\mathrm{e}^x\right)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

2°)

$$\mathrm{G}'(\ln 3) = \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^2}{1+\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^2}$$

$$= \frac{3^2}{1+3^2} \qquad \text{(on utilise } \mathrm{e}^{\ln 3} = 3\text{)}$$

$$= \frac{9}{10}$$