TS1

Contrôle du mardi 7 novembre 2017 (1 heure)

Partie réservée aux élèves n'ayant pas fait la spécialité mathématiques

---

I. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 3 points ; c) 1 point)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

- $u_0 = v_0 = 1$;
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.

On ne cherchera pas à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

1°) Calculer u_2 et v_2. Détailler les calculs.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
Les étapes et la rédaction sont fournies. Il est demandé de compléter les lignes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$ ».

a) Vérifions que $P(0)$ est vraie.
On attend une rédaction du type : « D'une part, … . D'autre part, … ».

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

b) Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $2u_k - 3v_k = (-1)^{k+1}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $2u_{k+1} - 3v_{k+1} = (-1)^{k+2}$.

On débutera directement par le calcul $2u_{k+1} - 3v_{k+1} = ...$ (présenter les calculs en colonnes).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

c) Conclure clairement.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

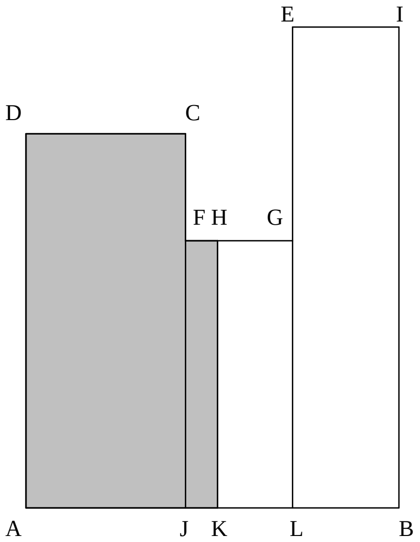
……………………………………………………………………………………………

II. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Sur la figure ci-contre, une unité de longueur est fixée et on donne $AB = 7$, $AJ = 3$, $JL = 2$, $LB = 2$, $AD = 7$, $BI = 9$, $JF = 5$. Le point K est mobile sur le segment $[AB]$ et on note x la longueur AK. Le point H est également mobile de sorte que la droite (KH) reste parallèle à (AD).

On note $f(x)$ l'aire du domaine grisé exprimée dans l'unité d'aire associée à l'unité de longueur fixée.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;7]$.

Pour comprendre, on pourra faire deux figures au brouillon pour $x = 2$ puis pour $x = 4$ puis vérifier que dans le premier cas l'aire du domaine grisé est égale à 14 dans le premier cas et à 26 dans le deuxième cas.



1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de x dans chaque cas :
1^er^ cas : $x \in [0\,;3]$; 2^e^ cas : $x \in [3\,;5]$; 3^e^ cas : $x \in [5\,;7]$.
On ne demande pas de détailler la démarche.
On donnera les expressions directement en écrivant un cas par ligne.

……………………..……………………………………………………………………………………..…………

……………………..……………………………………………………………………………………..…………

……………………..……………………………………………………………………………………..…………

2°) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $[0\,;7]$? Répondre par oui ou non sans justifier.

…………………….

3°) Pour quelle valeur de x l'aire du domaine grisé est-elle égale à 40 ?

……………………. (écrire une seule valeur sans égalité)

III. (6 points : 1°) a) 2 points ; b) 1 point ; 2°) a) 2 points ; b) 1 point)

On considère les algorithmes ci-contre. Les variables n, u, k sont des entiers naturels. La variable S est un réel.
On précise que la variable n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il n'est pas demandé de programmer ces algorithmes sur la calculatrice.
Dans la question 1°), on s'intéresse à l'algorithme 1 (algorithme de gauche).
Dans la question 2°), on s'intéresse à l'algorithme 2 (algorithme de droite).

Pour la question b) du 1°) et du 2°), on attend une expression sous la forme $\sum_{k=1}^{k=n}$..........

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 1
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
  u prend la valeur $u \times k$
  S prend la valeur $S + u$
FinPour

Sortie :
Afficher S

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 1
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
  u prend la valeur $u \times k$
  Si k est pair
    Alors S prend la valeur $S + u$
    Sinon S prend la valeur $S - u$
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher S

1°) a) Faire tourner l'algorithme 1 « à la main » pour $n = 4$ en entrée. On complètera le tableau suivant d'évolution des variables k, u et S.

k		1	2	3	4
u	1				
S	0				

La valeur de S affichée en sortie est égale à …………………………………….. .

b) Exprimer la valeur de S affichée en sortie pour l'algorithme 1 sous la forme d'une somme.

………………………………………….. (une seule réponse)

2°) a) Faire tourner l'algorithme 2 « à la main » pour $n = 4$ en entrée et donner la valeur de S affichée en sortie.

……………………….. (une seule valeur)

b) Exprimer la valeur de S affichée en sortie pour l'algorithme 2 sous la forme d'une somme.

………………………………………….. (une seule réponse)

Corrigé du contrôle du 7-11-2017

I.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

- $u_0 = v_0 = 1$;
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.

On ne cherchera pas à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

1°) Calculer u_2 et v_2. Détailler les calculs.

$u_1 = 5 \quad v_1 = 3$

$$\begin{aligned} u_2 &= 2\times5+3\times3 \\ &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 2\times5+3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

2°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
Les étapes et la rédaction sont fournies. Il est demandé de compléter les lignes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$ ».

a) Vérifions que $P(0)$ est vraie.
On attend une rédaction du type : « D'une part, … . D'autre part, … ».

D'une part,

$$\begin{aligned} 2u_0 - 3v_0 &= 2\times1-3\times1 \\ &= 2-3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

D'autre part, $(-1)^{0+1} = -1$.

Donc on peut écrire $2u_0 - 3v_0 = (-1)^{0+1}$ et par suite $P(0)$ est vraie.

b) Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $2u_k - 3v_k = (-1)^{k+1}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $2u_{k+1} - 3v_{k+1} = (-1)^{k+2}$.

On débutera directement par le calcul $2u_{k+1} - 3v_{k+1} = ...$ (présenter les calculs en colonnes).

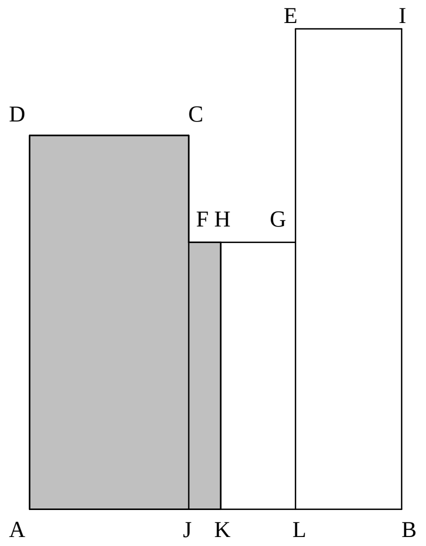
$$\begin{aligned} 2u_{k+1} - 3v_{k+1} &= 4u_k + 6v_k - 6u_k - 3v_k \\ &= -2u_k + 3v_k \\ &= -(2u_k - 3v_k) \\ &= -(-1)^{k+1} \quad \text{(on utilise le fait que } P(k) \text{ est vraie par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-1)\times(-1)^{k+1} \\ &= (-1)^{k+2} \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

c) Conclure clairement.

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k fixé, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Donc d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

II.



Sur la figure ci-contre, une unité de longueur est fixée et on donne AB = 7, AJ = 3, JL = 2, LB = 2, AD = 7, BI = 9, JF = 5. Le point K est mobile sur le segment [AB] et on note x la longueur AK.
On note $f(x)$ l'aire du domaine grisé exprimée dans l'unité d'aire associée à l'unité de longueur fixée.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;7]$.
Pour comprendre, on pourra faire deux figures au brouillon pour $x = 2$ puis pour $x = 4$ puis vérifier que dans le premier cas l'aire du domaine grisé est égale à 14 dans le premier cas et à 26 dans le deuxième cas.

1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de x dans chaque cas :
1[er] cas : $x \in [0\,;3]$; 2[e] cas : $x \in [3\,;5]$; 3[e] cas : $x \in [5\,;7]$.
On ne demande pas de détailler la démarche.
On donnera les expressions directement en écrivant un cas par ligne.

Les points H et K sont mobiles.

1[er] cas : $x \in [0\,;3]$
Dans ce cas, $f(x) = 7x$.

2[e] cas : $x \in [3\,;5]$
Dans ce cas, $f(x) = 5(x-3) + 21$ soit $f(x) = 5x + 6$.

3^e cas : $x \in [5\,;7]$

Dans ce cas, $f(x) = 9(x-5)+31$ soit $f(x) = 9x-14$.

On trouve ces expressions en faisant des figures dans chaque cas.

2°) La fonction *f* est-elle continue sur l'intervalle $[0\,;7]$? Répondre par oui ou non sans justifier.

oui

3°) Pour quelle valeur de *x* l'aire du domaine grisé est-elle égale à 40 ?

6 (écrire une seule valeur sans égalité)

III.

On considère les algorithmes ci-contre. Les variables *n*, *u*, *k* sont des entiers naturels. La variable *S* est un réel.
On précise que la variable *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il n'est pas demandé de programmer ces algorithmes sur la calculatrice.
Dans la question 1°), on s'intéresse à l'algorithme 1 (algorithme de gauche).
Dans la question 2°), on s'intéresse à l'algorithme 2 (algorithme de droite).

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 1
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *k* allant de 1 à *n* **Faire**
    u prend la valeur $u \times k$
    S prend la valeur $S + u$
FinPour

Sortie :
Afficher *S*

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 1
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *k* allant de 1 à *n* **Faire**
    u prend la valeur $u \times k$
    Si *k* est pair
        Alors *S* prend la valeur $S + u$
        Sinon *S* prend la valeur $S - u$
    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher *S*

Pour la question b) du 1°) et du 2°), on attend une expression sous la forme $\sum_{k=1}^{k=n}$.........

1°) a) Faire tourner l'algorithme 1 « à la main » pour $n = 4$ en entrée. On complètera le tableau suivant d'évolution des variables *k*, *u* et *S*.

k		1	2	3	4
u	1	1	2	6	24
S	0	1	3	9	33

La valeur de *S* affichée en sortie est égale à 33.

b) Exprimer la valeur de *S* affichée en sortie pour l'algorithme 1 sous la forme d'une somme.

$$\sum_{k=1}^{k=n} k! \text{ (une seule réponse)}$$

2°) a) Faire tourner l'algorithme 2 « à la main » pour $n = 4$ en entrée et donner la valeur de *S* affichée en sortie.

19 (une seule valeur)

b) Exprimer la valeur de *S* affichée en sortie pour l'algorithme 2 sous la forme d'une somme.

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left((-1)^k k!\right) \text{ (une seule réponse)}$$