



Partie commune à tous les élèves (2 heures)

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Soit z un nombre complexe. Pour tout entier naturel n , on pose $Z_n = z^n + (\bar{z})^n$.

Démontrer que pour tout entier naturel n , Z_n est un réel.

Indications : Effectuer un raisonnement direct (donc pas de raisonnement par récurrence) en utilisant la conjugaison et sans passer par la forme algébrique de z . Il n'y a quasiment pas de calcul à faire.

2°) Démontrer sans calcul, en utilisant le résultat de la question 1°), que pour tout entier naturel n , $(2-i)^{2n} + (3+4i)^n$ est un réel.

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f: x \mapsto E(x) \times E\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}^* .

1°) Déterminer la valeur de f sur l'intervalle $]0; 1[$ puis sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Seules les réponses correctement justifiées seront prises en compte.

2°) Tracer en vert avec soin la représentation graphique de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3°) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 , $f(x) = -E(x)$.

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} dont les deux premiers termes sont $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$ pour tout entier naturel n .

1°) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_{n+1} + u_n$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Indication : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1}$. On remplace ensuite...

Exprimer v_n en fonction de n .

2°) Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = u_{n+1} - 8u_n$.

Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

Exprimer w_n en fonction de n .

3°) À l'aide des résultats précédents, exprimer u_n en fonction de n .

IV. (5 points + 1 point bonus : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f: x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

La question 3°) est une question bonus à ne traiter que s'il reste du temps à la fin.

1°) Calculer $f'(x)$ et former le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

Calculer au brouillon les extremums locaux. On donnera les résultats sous la forme $\frac{a+b\sqrt{3}}{2}$ où a et b sont des entiers relatifs. Compléter le tableau de variations avec ces valeurs.

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$.

3°) Vérifier que pour tout réel x , on a $f(x) = 3x^3 - (x+1)^3$ et déterminer la valeur exacte de α .

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k \right)^2$

pour tout entier naturel n .

1°) Dans cette question, on prend $u_0 = 3$. Calculer u_2 .

2°) Dans cette question, on prend $u_0 = -1$. Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ? Répondre sans justifier.

3°) On considère l'algorithme ci-dessous qui permet de saisir en entrée la valeur de u_0 ainsi que la valeur d'un entier naturel $n \geq 1$ et qui affiche en sortie la valeur de u_n .

Les variables u et s sont des réels. Les variables n et i sont des entiers naturels, la valeur de n saisie en entrée devant être supérieure ou égale à 1.

Il n'est pas demandé de programmer cet algorithme sur la calculatrice.

Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme.

Entrée :

Saisir u

Saisir n

Traitement :

s prend la valeur u

Pour i allant de 1 à n **Faire**

u prend la valeur ...

s prend la valeur ...

FinPour

Sortie :

Afficher u

Conseils de présentation et de rédaction

I.

1°) On pensera à bien quantifier les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \overline{Z_n} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

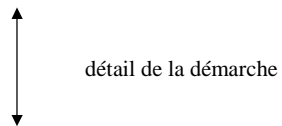
$$= \dots\dots\dots$$

II.

1°) On rédigera ainsi :

- Déterminons la valeur de f sur l'intervalle $]0; 1[$.

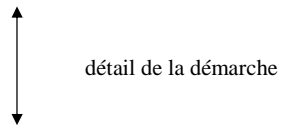
Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $]0; 1[$.



Donc $\forall x \in]0; 1[\quad f(x) = \dots$

- Déterminons la valeur de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

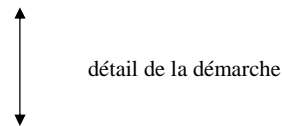


Donc $\forall x \in]1; +\infty[\quad f(x) = \dots$

2°) On attend une représentation graphique très précises.

3°) On rédigera ainsi :

Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $] -\infty; -1]$.



Donc $\forall x \in] -\infty; -1] \quad f(x) = -E(x)$.

III.

1°) On rédigera ainsi en commençant directement le calcul sans faire de phrase d'introduction pour gagner de la place.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1}$$

$$= \dots\dots\dots$$

On en déduit que la suite (v_n) [attention à la notation avec des parenthèses] est une suite géométrique de raison ...

Pour l'expression de v_n en fonction de n , on écrira directement $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dots$

2°) On appliquera les mêmes consignes qu'à la question précédente.

IV.

Dans tout l'exercice, on fera bien attention aux notations. En particulier, on ne confondra pas f et $f(x)$.

Voici quelques exemples de phrases de rédactions-types : « f est dérivable sur \mathbb{R} car ... », « f est continue sur \mathbb{R} car ... », « f est strictement croissante sur ... ».

1°) On pensera à quantifier l'égalité $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dots$

On attend le tableau de variation sous la forme suivante :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

2°) On sera très vigilant sur la rédaction et la présentation.

On complètera le tableau de variations de la question précédente avec α .

Conseils donnés à l'oral

On peut utiliser l'abréviation TVI pour « théorème des valeurs intermédiaires ».

Prénom : Nom :

Note : / 20

I (3)	II (5)	III (3)	IV (5)	V (4)	Total/20

I. (3 points : 1° 1 point ; 2 points)

1°)

.....

.....

.....

2°)

.....

.....

.....

.....

1°)

.....

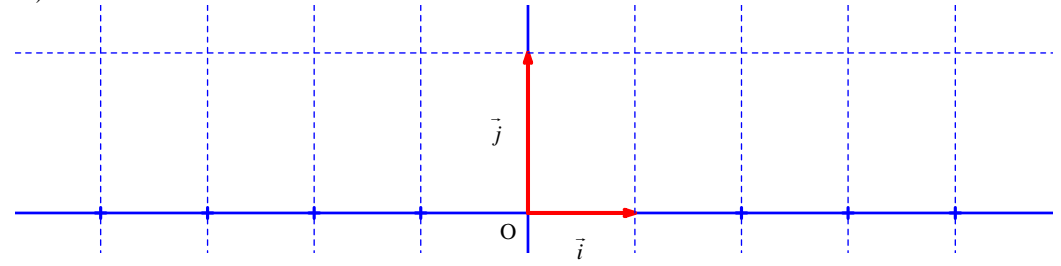
.....

.....

.....

.....

2°)



3°)

.....

.....

.....

.....

.....

III. (3 points : 1° 1 point ; 2° 1 point ; 3° 1 point)

1°)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2°)

.....

.....

.....

.....

.....

3°)

.....

.....

.....

.....

.....

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

1°)

.....

.....

.....

.....

.....

2°)

.....

.....

.....

3°) sur copie

V. (4 points : 1°) 1 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

1°)

.....

.....

.....

.....

.....

2°)

.....

.....

.....

3°)

.....

.....

.....

Corrigé du contrôle du 7-11-2017

I.

1°) Soit z un nombre complexe. Pour tout entier naturel n , on pose $Z_n = z^n + (\bar{z})^n$.

Démontrer que pour tout entier naturel n , Z_n est un réel.

Indications : Effectuer un raisonnement direct (donc pas de raisonnement par récurrence) en utilisant la conjugaison et sans passer par la forme algébrique de z . Il n'y a quasiment pas de calcul à faire.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad \overline{Z_n} &= \overline{z^n + (\bar{z})^n} \\ &= \overline{z^n} + \overline{(\bar{z})^n} \\ &= \overline{z^n} + \overline{(\bar{z}^n)} \\ &= \overline{z^n} + z^n \\ &= Z_n\end{aligned}$$

On a utilisé diverses propriétés des conjugués : « Le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués », « Le conjugué d'une puissance est égal à la puissance du conjugué », « Le conjugué du conjugué d'un nombre complexe est égal au complexe ».

D'après le cours, si un nombre complexe est égal à son conjugué, alors c'est un réel (c'est même une caractérisation des nombres réels).

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n \in \mathbb{R}$.

Variante :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n &= z^n + \overline{z^n} \\ &= 2\operatorname{Re}(z^n)\end{aligned}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n \in \mathbb{R}$.

Commentaires :

• En TS, il n'y a pas d'autres façons.

• Si on posait $z = x + iy$, comme on ne sait pas développer $(a + b)^n$, cela ne conduirait à rien.

On ne peut pas écrire que le conjugué d'un nombre complexe quelconque est égal à son opposé (erreur de nombreux élèves).

2°) Démontrer sans calcul, en utilisant le résultat de la question 1°), que pour tout entier naturel n , $(2-i)^{2n} + (3+4i)^n$ est un réel.

On commence par transformer l'expression $(2-i)^{2n} + (3+4i)^n$ de manière à utiliser le résultat du 1°).

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad (2-i)^{2n} + (3+4i)^n &= \left[(2-i)^2 \right]^n + (3+4i)^n \\ &= (3-4i)^n + (3+4i)^n\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le résultat du 1°) avec $z = 3 - 4i$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $(2-i)^{2n} + (3+4i)^n$ est un réel.

II.

On considère la fonction $f: x \mapsto E(x) \times E\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}^* .

1°) Déterminer la valeur de f sur l'intervalle $]0; 1[$ puis sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Seules les réponses correctement justifiées seront prises en compte.

Pour avoir une idée, il était conseillé vivement de rentrer la fonction dans la calculatrice et de la représenter graphiquement.

• Déterminons la valeur de f sur l'intervalle $]0; 1[$.

Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $]0; 1[$.

On a $E(x) = 0$.

Donc $\forall x \in]0; 1[\quad f(x) = 0$.

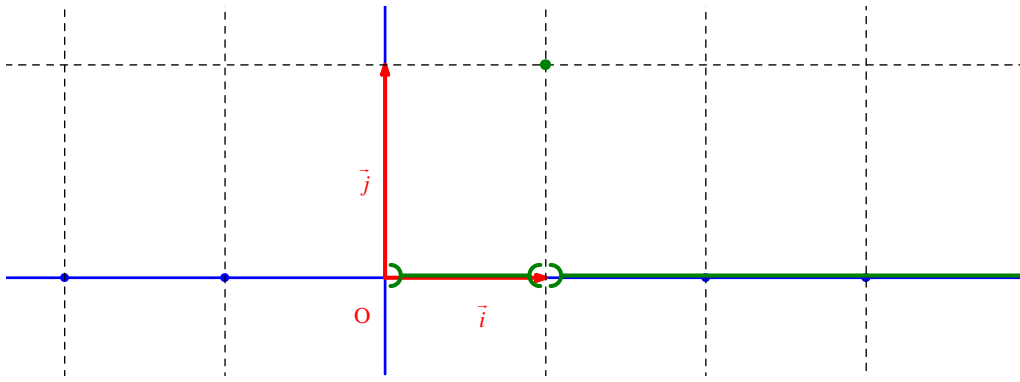
• Déterminons la valeur de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Soit x un réel quelconque de l'intervalle $]1; +\infty[$.

$0 < \frac{1}{x} < 1$ d'où $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Donc $\forall x \in]1; +\infty[\quad f(x) = 0$.

2°) Tracer en vert avec soin la représentation graphique de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\quad f(x) = 0$$

De plus, $f(1) = E(1) \times E\left(\frac{1}{1}\right) = 1 \times 1 = 1$. On doit donc placer le point A de coordonnées $(1; 1)$ qui est un point isolé de la représentation graphique.
Ce point n'est facile à observer sur la calculatrice.

On fait très attention aux extrémités.

3°) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 , $f(x) = -E(x)$.

Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $]-\infty; -1]$.

On a : $-1 \leq \frac{1}{x} < 0$.

Par suite, $E\left(\frac{1}{x}\right) = -1$.

On en déduit que $\forall x \in]-\infty; -1] \quad f(x) = -E(x)$.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} dont les deux premiers termes sont $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$ pour tout entier naturel n .

1°) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_{n+1} + u_n$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Indication : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1}$. On remplace ensuite...

Exprimer v_n en fonction de n .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} \\ &= 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 8u_{n+1} + 8u_n \\ &= 8(u_{n+1} + u_n) \\ &= 8v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8.

Son premier terme est $v_0 = 1$.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 8^n$.

Remarque : Le calcul des premiers termes de la suite (v_n) aurait permis de conjecturer que (v_n) est effectivement géométrique et sa raison.

2°) Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = u_{n+1} - 8u_n$.

Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

Exprimer w_n en fonction de n .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} &= u_{n+2} - 8u_{n+1} \\ &= 7u_{n+1} + 8u_n - 8u_{n+1} \\ &= 8u_n - u_{n+1} \\ &= -w_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison -1 .

Son premier terme est $w_0 = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = (-1)^n$ [le -1 doit impérativement être écrit entre parenthèses]

3°) À l'aide des résultats précédents, exprimer u_n en fonction de n .

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = v_n - u_n$ et $u_{n+1} = w_n + 8u_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n = w_n + 8u_n$ soit $9u_n = v_n - w_n$ et finalement $u_n = \frac{v_n - w_n}{9}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{8^n - (-1)^n}{9}$.

IV.

On considère la fonction $f: x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

La question 3°) est une question bonus à ne traiter que s'il reste du temps à la fin.

1°) Calculer $f'(x)$ et former le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

Calculer au brouillon les extremums locaux. On donnera les résultats sous la forme $\frac{a+b\sqrt{3}}{2}$ où a et b sont des entiers relatifs. Compléter le tableau de variations avec ces valeurs.

f est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 6x^2 - 6x - 3 \\ &= 3(2x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

Les racines du polynôme $2x^2 - 2x - 1$ sont $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (obtenues grâce à discriminant réduit et vérifiées à la calculatrice).

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
SGN de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de f		\nearrow	\searrow	\nearrow	

$\frac{-6+3\sqrt{2}}{2}$ $\frac{-6-3\sqrt{2}}{2}$

On calcule les extremums locaux c'est-à-dire les images de $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ grâce à la calculatrice (le modèle TI-83 Premium CE donne immédiatement le résultat).

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$.

L'équation (E) s'écrit $2x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.
 On ne cherche pas du tout à résoudre cette équation.
 Il s'agit juste de démontrer qu'elle admet une unique solution dans l'intervalle $[2; 3]$.

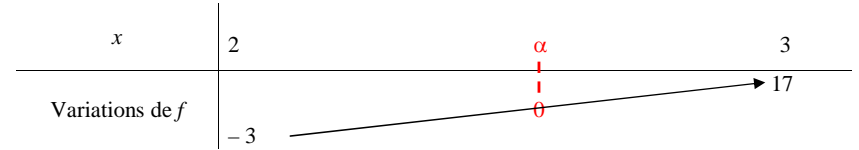
On commence par calculer $f(2)$ et $f(3)$ car on aura besoin dans la suite.

$$f(2) = -3 \text{ et } f(3) = 17$$

L'intervalle $[2; 3]$ est inclus dans l'intervalle $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$.

On dresse ensuite le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2; 3]$.

On place 0 et α .



On n'a plus qu'à retraduire les informations contenues dans ce tableau de variations, notamment la flèche qui signifie la stricte croissance et la continuité.

C_1 : La fonction f est continue sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme donc par restriction, f est continue sur $[2; 3]$.

C_2 : f est strictement croissante sur $[2; 3]$.

C_3 : 0 est compris entre $f(2)$ et $f(3)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$.

3°) Vérifier que pour tout réel x , on a $f(x) = 3x^3 - (x+1)^3$ et déterminer la valeur exacte de α .

1^{ère} méthode :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= 3x^3 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &= 3x^3 - (x+1)^3 \quad (\text{identité remarquable } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \end{aligned}$$

2^e méthode :

On pose $g(x) = 3x^3 - (x+1)^3$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= 3x^3 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On va résoudre algébriquement l'équation (E) en utilisant l'égalité que l'on vient d'établir.

$$\begin{aligned}
 \text{(E)} &\Leftrightarrow 3x^3 - (x+1)^3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3x^3 = (x+1)^3 \\
 &\Leftrightarrow x\sqrt[3]{3} = x+1 \quad (\text{les cubes de deux réels sont égaux si et seulement si ces deux réels sont égaux}) \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3}-1)x = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}
 \end{aligned}$$

On a donc $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$.

Cette égalité donne la valeur exacte de α .

V.

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k \right)^2$

pour tout entier naturel n .

Il n'est pas possible de trouver une expression explicite de (u_n) en fonction de n .

1°) Dans cette question, on prend $u_0 = 3$. Calculer u_2 .

$$\begin{array}{l}
 u_1 = u_{0+1} \\
 = \left(\sum_{k=0}^{k=1} u_k \right)^2 \\
 = (u_0)^2 \\
 = 3^2 \\
 = 9
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 u_2 = u_{1+1} \\
 = \left(\sum_{k=0}^{k=2} u_k \right)^2 \\
 = (u_0 + u_1)^2 \\
 = (3 + 9)^2 \\
 = 12^2 \\
 = 144
 \end{array}$$

On peut rentrer la suite dans la calculatrice :

$$\begin{aligned}
 u(0) &= 1 \\
 u(n) &= \left(\sum_{K=0}^{K=n-1} (u(K)) \right)^2
 \end{aligned}$$

La calculatrice ne donne que les valeurs de u_1 et de u_2 .
Les calculs sont trop compliqués pour elle.

2°) Dans cette question, on prend $u_0 = -1$. Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ? Répondre sans justifier.

$$\begin{array}{l}
 u_1 = \left(\sum_{k=0}^{k=0} u_k \right)^2 \\
 = (u_0)^2 \\
 = (-1)^2 \\
 = 1
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 u_2 = \left(\sum_{k=0}^{k=1} u_k \right)^2 \\
 = (-1+1)^2 \\
 = 0^2 \\
 = 0
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 u_3 = \left(\sum_{k=0}^{k=2} u_k \right)^2 \\
 = (-1+1+0)^2 \\
 = 0^2 \\
 = 0
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 u_4 = \left(\sum_{k=0}^{k=3} u_k \right)^2 \\
 = (-1+1+0+0)^2 \\
 = 0^2 \\
 = 0
 \end{array}$$

On démontre aisément par récurrence, que $\forall n \geq 2 \quad u_n = 0$.

Si $u_0 = -1$, la suite (u_n) est constante à partir de l'indice 2.

On dit que la suite (u_n) est stationnaire.

3°) On considère l'algorithme ci-dessous qui permet de saisir en entrée la valeur de u_0 ainsi que la valeur d'un entier naturel $n \geq 1$ et qui affiche en sortie la valeur de u_n .

Les variables u et s sont des réels. Les variables n et i sont des entiers naturels, la valeur de n saisie en entrée devant être supérieure ou égal à 1.

Il n'est pas demandé de programmer cet algorithme sur la calculatrice.

Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme.

Entrée :
Saisir u
Saisir n

Traitement :
 s prend la valeur u
Pour i allant de 1 à n **Faire**
 u prend la valeur ...
 s prend la valeur ...
FinPour

Sortie :
Afficher u

Traitement :
 s prend la valeur u
Pour i allant de 1 à n **Faire**
 u prend la valeur s^2
 s prend la valeur $s + u$
FinPour

En programmant l'algorithme sur la calculatrice, on peut retrouver la valeur de u_2 calculée « à la main » dans la question 1°).