$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 8 novembre 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x\sqrt{2}=x+1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

……

……

……

……

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=$ ………………………………………………………………

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-(x-1)^2=1$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

……

……

……

……

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=$ ………………………………………………………………

II. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1°) Compléter sans explication la phrase suivante :

Les racines du polynôme x^2-2x-1 sont ……………… et ………………

Dresser le tableau de signes de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2°) Calculer $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $f\left(1+\sqrt{3}\right)$ sous la forme la plus simple possible. On attend le détail des calculs.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $\dfrac{1}{x} \leqslant 3 \quad (1)$; $\dfrac{1}{x} > 0 \quad (2)$.

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1 =$	$S_2 =$ ....

IV. (2 points)

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \ (1)$ à l'aide d'un changement d'inconnue.

On pose $X = x^2$.

(1) s'écrit alors ………………………………………………………… $(1')$.

On considère le polynôme ………………………………………….. .

Les racines de ce polynôme sont ………………………………………….. .

Or $X = x^2$.

On en déduit que (1) est successivement équivalente à (deux lignes seulement à compléter : première ligne avec des égalités du type $x^2 = \ldots$ et deuxième ligne avec des égalités du type $x = \ldots$) :

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$S_1 =$ ....

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère le polynôme $P(x) = 3x^2 + x - 2$.

Compléter sans explication la phrase suivante :

Les racines du polynôme $P(x)$ sont ……………… et ………………..

Pour les deux questions de l'exercice, des consignes de présentation et de rédaction sont données en bas de la page ci-contre.

1°) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré ne comportant pas de fractions.
On écrira toutes les étapes de la démarche sur les lignes ci-dessous.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

2°) Exprimer $|P(x)|$ sans valeur absolue pour $x \in \left[-1 \,;\, \dfrac{2}{3}\right]$. Expliquer.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

Consignes de présentation :

Pour la question 1°), présenter les calculs en colonnes en quantifiant comme suit :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \ldots\ldots.$

$= \ldots\ldots.$

$= \ldots\ldots.$

Pour la question 2°), on pensera à quantifier.

Par exemple, on écrira $x \in \left[-1 \,;\, \dfrac{2}{3}\right] \quad |P(x)| = \ldots\ldots.$.

Corrigé du contrôle du 8-11-2017

I.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x\sqrt{2} = x + 1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x\sqrt{2} - x = 1$

$x\left(\sqrt{2} - 1\right) = 1$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$

$x = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{\left(\sqrt{2} - 1\right) \times \left(\sqrt{2} + 1\right)}$

$x = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{1}$

$x = \sqrt{2} + 1$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \left\{1 + \sqrt{2}\right\}$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - (x - 1)^2 = 1$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$2x^2 - \left(x^2 - 2x + 1\right) = 1$

$x^2 + 2x - 2 = 0$

$x = -1 + \sqrt{3}$ ou $x = -1 - \sqrt{3}$ (par calcul du discriminant réduit et vérification à la calculatrice)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2 = \left\{-1 + \sqrt{3}\ ;\ -1 - \sqrt{3}\right\}$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1°) Compléter sans explication la phrase suivante :

Les racines du polynôme $x^2 - 2x - 1$ sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$.

On utilise le discriminant réduit.

Dresser le tableau de signes de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
SGN $x^2 - 2x - 1$		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN $x - 1$		$-$	|	$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$	|	$+$	
SGN $f(x)$		$-$	0^{num}	$+$	||	$-$	0^{num}	$+$	

2°) Calculer $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $f\left(1 + \sqrt{3}\right)$ sous la forme la plus simple possible. On attend le détail des calculs.

$f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$

$= \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

$= \dfrac{2\left(1 - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3} - 1}$

$= -2$

$f\left(1 + \sqrt{3}\right) = \dfrac{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right) - 1}{1 + \sqrt{3} - 1}$

$= \dfrac{4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

On peut détailler ainsi $\dfrac{2\left(1 - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{2 \times \left[-\left(\cancel{\sqrt{3} - 1}\right)\right]}{\cancel{\sqrt{3} - 1}} = -2$.

On peut aussi tout simplement remarquer que la quantité $1 - \sqrt{3}$ est l'opposé de la quantité $\sqrt{3} - 1$ ce qui permet de simplifier immédiatement le quotient en -1.

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $\dfrac{1}{x} \leqslant 3$ (1) ; $\dfrac{1}{x} > 0$ (2).

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1 = \left]-\infty\,;0\right[\cup \left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$	$S_2 = \left]0\,;+\infty\right[$

Pour la résolution de (1), on écrit que (1) est équivalente à $\dfrac{1}{x}-3 \leqslant 0$ ou encore $\dfrac{1-3x}{x} \leqslant 0$.

On dresse ensuite un tableau de signes.

On peut aussi faire une résolution graphique de l'inéquation.

IV.

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4-4x^2+3=0$ (1) à l'aide d'un changement d'inconnue.

On pose $X = x^2$.

(1) s'écrit alors $X^2-4X+3=0$ $(1')$.

On considère le polynôme X^2-4X+3.

Les racines de ce polynôme sont 1 et 3.

Or $X = x^2$.

On en déduit que (1) est successivement équivalente à (deux lignes seulement à compléter : première ligne avec des égalités du type $x^2 = \ldots$ et deuxième ligne avec des égalités du type $x = \ldots$) :

$x^2 = 1$ ou $x^2 = 3$

$x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$$S_1 = \left\{1\,;-1\,;\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\right\}$$

V.

On considère le polynôme $P(x) = 3x^2+x-2$.

Compléter sans explication la phrase suivante :

Les racines du polynôme $P(x)$ sont – 1 et $\dfrac{2}{3}$.

On résout l'équation $P(x)=0$ soit en utilisant le discriminant soit en remarquant que – 1 est racine évidente.

Pour les deux questions de l'exercice, des consignes de présentation et de rédaction sont données en bas de la page ci-contre.

1°) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré ne comportant pas de fractions.
On écrira toutes les étapes de la démarche sur les lignes ci-dessous.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 3(x+1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

$\qquad\qquad\qquad = (x+1)(3x-2)$

2°) Exprimer $\left|P(x)\right|$ sans valeur absolue pour $x \in \left[-1\,;\dfrac{2}{3}\right]$. Expliquer.

D'après la règle du signe d'un polynôme du second degré, $\forall x \in \left[-1\,;\dfrac{2}{3}\right] \quad P(x) \leqslant 0$.

Donc $\forall x \in \left[-1\,;\dfrac{2}{3}\right] \quad \left|P(x)\right| =$ opposé de $P(x)$ soit $\forall x \in \left[-1\,;\dfrac{2}{3}\right] \quad \left|P(x)\right| = -P(x)$.

On obtient finalement $\forall x \in \left[-1\,;\dfrac{2}{3}\right] \quad \left|P(x)\right| = -3x^2-x+2$.

Consignes de présentation :

Pour la question 1°), présenter les calculs en colonnes en quantifiant comme suit :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \ldots\ldots.$

$\qquad\qquad = \ldots\ldots.$

$\qquad\qquad = \ldots\ldots.$

Pour la question 2°), on pensera à quantifier.

Par exemple, on écrira $x \in \left[-1\,;\dfrac{2}{3}\right] \quad \left|P(x)\right| = \ldots\ldots.$.