TS1

Contrôle du vendredi 13 octobre 2017
(1 h 30)

Prénom et nom : ………………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2nu_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = 2^{n-1} \times (n-1)!$.

On apportera un très grand soin à la rédaction et à la présentation.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout réel strictement positif a on associe la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-a}$ définie sur $[0\,;a[\cup]a\,;+\infty[$.

1°) Calculer $f_a'(x)$ pour $x \in]0\,;a[\cup]a\,;+\infty[$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur développé réduit (faire le trait de fraction à la règle en veillant à ce qu'il soit bien centré par rapport au signe $=$).

$\forall x \in]0\,;a[\cup]a\,;+\infty[\qquad f_a'(x) =$ ……………………………………… (un seul résultat)

2°) Déterminer le sens de variation de f_a sur les intervalles $[0\,;a[$ et $]a\,;+\infty[$.

Former le tableau de variations de f_a.

……

……

III. (2 points)

Démontrer que la fonction F : $x \mapsto \dfrac{(2x+4)\sqrt{x-1}}{3}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.
On pourra se contenter des grandes étapes de calcul. On fera très attention à la rédaction et aux notations.

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (2 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto 1-x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ définies sur $\mathbb{R}$.
On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h = f \circ g$).
Exprimer $h(x)$ en fonction de x (une seule expression sous la forme d'un seul quotient).

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad h(x) =$ ....

V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1-2\left(1-\sqrt{x}\right)^5$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+x-1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.
On pourra observer que $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ pour tout réel $x \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour ………………………...

2°) On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. On prend $x_A < x_B$.
Compléter la phrase suivante :

La tangente en B à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur …………… .

3°) Calculer $f''(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f''(x) =$ .... (un seul résultat)

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^{n+k}$.

1°) Calculer S_3 à la main.

…………………………… (une seule égalité)

2°) Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n (résultat sans symbole $\sum$).

……………………………………………………………………… (une seule égalité)

Corrigé du contrôle du 13-10-2017

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2nu_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = 2^{n-1} \times (n-1)!$.
On apportera un très grand soin à la rédaction et à la présentation.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = 2^{n-1} \times (n-1)!$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(1)$ est vraie.
On a $u_1 = 1$ par définition de la suite (u_n).
Par ailleurs, on a $2^{1-1} \times (1-1)! = 2^0 \times 0! = 1 \times 1 = 1$ (car $0! = 1$).
On peut donc bien écrire $u_1 = 2^{1-1} \times (1-1)!$ et par suite $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = 2^{k-1} \times (k-1)!$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 2^k \times k!$.

En effet, $u_{k+1} = 2^{(k+1)-1} \times ((k+1)-1)!$

On a : $u_{k+1} = 2ku_k$.
Or $u_k = 2^{k-1} \times (k-1)!$ par hypothèse de récurrence.
Donc $u_{k+1} = 2k \times 2^{k-1} \times (k-1)!$ ce qui donne immédiatement $u_{k+1} = 2 \times 2^{k-1} \times (k-1)! \times k$ puis $u_{k+1} = 2^k \times k!$ car $(k-1)! \times k = k!$.
On en déduit que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(1)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geqslant 1$, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

II.

À tout réel strictement positif a on associe la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-a}$ définie sur $[0\,;a[\cup]a\,;+\infty[$.

1°) 1°) Calculer $f_a'(x)$ pour $x \in]0\,;a[\cup]a\,;+\infty[$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur développé réduit (faire le trait de fraction à la règle en veillant à ce qu'il soit bien centré par rapport au signe $=$).

$$\forall x \in]0\,;a[\cup]a\,;+\infty[\quad f_a'(x) = \frac{-x-a}{2\sqrt{x}(x-a)^2} \quad \text{(un seul résultat)}$$

ou $$\forall x \in]0\,;a[\cup]a\,;+\infty[\quad f_a'(x) = -\frac{x+a}{2\sqrt{x}(x-a)^2} \quad \text{(un seul résultat)}$$

On ne met pas de parenthèses autour du $2\sqrt{x}$ ($f_a'(x) = \dfrac{-x-a}{(2\sqrt{x})(x-a)^2}$).

$$\forall x \in]0\,;a[\cup]a\,;+\infty[\quad f_a'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x-a) - \sqrt{x} \times 1}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{\frac{x-a}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{\frac{x-a-2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{\frac{x-a-2x}{2\sqrt{x}}}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{\frac{-x-a}{2\sqrt{x}}}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{-x-a}{2\sqrt{x}(x-a)^2}$$

/!\ On ne développe pas le dénominateur : cela aboutirait à une expression plus compliquée sans intérêt.

Une autre méthode pour dériver consiste à écrire $f(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{1}{x-a}$ et à utiliser la formule de dérivée d'un produit.

2°) Déterminer le sens de variation de f_a sur les intervalles $[0\,;a[$ et $]a\,;+\infty[$.
Former le tableau de variations de f_a.

$\forall x \in \left]0\,;a\right[\cup \left]a\,;+\infty\right[\quad -x-a<0$ car $a>0$ par hypothèse.

$\forall x \in \left]0\,;a\right[\cup \left]a\,;+\infty\right[\quad 2\sqrt{x}\left(x-a\right)^2>0$.

Donc $\forall x \in \left]0\,;a\right[\cup \left]a\,;+\infty\right[\quad f_a\,'(x)<0$.

On en conclut que f_a est strictement décroissante sur les intervalles $\left[0\,;a\right[$ et $\left]a\,;+\infty\right[$.

x	0		a		$+\infty$
Signe de $f_a\,'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
Variations de f_a	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	

On peut détailler davantage ainsi :

x	0		a		$+\infty$
Signe de $-x-a$		$-$		$-$	
Signe de $2\sqrt{x}$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
Signe de $\left(x-a\right)^2$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$	
Signe de $f_a\,'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
Variations de f_a	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	

$f_a(0)=0$ [on fait figurer cette valeur dans le tableau]

f_a n'est pas dérivable en 0 d'où la présence de la double barre sur la ligne du signe de $f_a\,'(x)$.

III.

Démontrer que la fonction $\text{F} : x \mapsto \dfrac{(2x+4)\sqrt{x-1}}{3}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$. Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.

On pourra se contenter des grandes étapes de calcul. On fera très attention à la rédaction et aux notations.

La méthode consiste tout simplement à calculer la dérivée de la fonction F dont l'expression est donnée.

F est dérivable sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$.

Pour effectuer le calcul de la dérivée plus simplement, on effectue la réécriture suivante de $\text{F}(x)$:

$\text{F}(x)=\dfrac{1}{3}\times(2x+4)\sqrt{x-1}$.

$$\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[\quad \text{F}'(x)=\frac{1}{3}\times\left[2\times\sqrt{x-1}+(2x+4)\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(2\sqrt{x-1}+\frac{2x+4}{2\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(2\sqrt{x-1}+\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2(x-1)+x+2}{\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}x}{\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$=f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\left]1\,;+\infty\right[$.

> /!\ La rédaction suivante est fausse : « On en déduit que $\text{F}(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $\left]1\,;+\infty\right[$ ».

On retiendra par cœur la rédaction : « $\boxed{\text{F}}$ est $\boxed{\text{une}}$ primitive de $\boxed{f}$ sur $\left]1\,;+\infty\right[$ ».

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto 1-x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ définies sur $\mathbb{R}$.

On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h=f\circ g$).

Exprimer $h(x)$ en fonction de x (une seule expression sous la forme d'un seul quotient).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = f\left[g(x)\right]$

$= f(\mathrm{X})$ avec $\mathrm{X} = g(x)$ soit $\mathrm{X} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$= 1 - \mathrm{X}^2$

$= 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$

$= \dfrac{x^2 \cancel{+1} \cancel{-1}}{x^2+1}$

$= \dfrac{x^2}{x^2+1}$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - 2\left(1-\sqrt{x}\right)^5$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{5\left(1-\sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{x}}$ (un seul résultat)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 0 - 2 \times 5 \times \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times \left(1-\sqrt{x}\right)^4$ (on utilise la formule $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$)

$= \cancel{2} \times 5 \times \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \times \left(1-\sqrt{x}\right)^4$

$= 5 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \left(1-\sqrt{x}\right)^4$

$= \dfrac{5\left(1-\sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{x}}$

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+x-1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

On pourra observer que $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ pour tout réel $x \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ (un seul résultat)

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 0 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$ (on utilise la formule suivante de dérivation $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$)

$= \dfrac{2-x}{x^3}$

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour $x = 2$.

<u>/!\</u> La valeur 0 est une valeur d'annulation du dénominateur de $f'(x)$. C'est donc une valeur interdite de $f'(x)$.
Ce n'est donc pas une valeur d'annulation de $f'(x)$.

2°) On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. On prend $x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{B}}$.
Compléter la phrase suivante :

La tangente en B à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur 12.

On commence par chercher les abscisses de A et B. Pour cela, on résout l'équation $f(x) = 0 \quad (1)$.

On résout (1) dans $\mathbb{R}^*$.

$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

Les racines du polynôme $2x^2+x-1$ sont -1 et $\dfrac{1}{2}$ (utilisation de la racine évidente -1 ou de la calculatrice).

Ainsi $x_{\mathrm{A}} = -1$ et $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{2}$.

On calcule $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2^3}}=\frac{3}{2}\times 2^3=3\times 2^2=3\times 4=12$$

La tangente en B à $\mathcal{C}$ a donc pour coefficient directeur 12. On peut vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

3°) Calculer $f''(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f''(x)=\frac{2x-6}{x^4} \quad \text{(un seul résultat)}$$

f'' désigne la dérivée seconde de f c'est-à-dire la dérivée de f'.

On utilise le résultat de la question 1°) $f'(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$.

1[ère] méthode :

On écrit $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}$$
$$=\frac{2x-6}{x^4}$$

2[e] méthode :

On écrit $f'(x)=(2-x)\times\dfrac{1}{x^3}$.

On utilise ensuite la dérivée d'un produit.

VII.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}2^{n+k}$.

1°) Calculer S_3 à la main.

$$S_3=120 \quad \text{(une seule égalité)}$$

$$S_3=\sum_{k=0}^{k=3}2^{3+k}$$
$$=2^3+2^4+2^5+2^6$$
$$=8+16+32+64$$
$$=120$$

2°) Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n (résultat sans symbole $\sum$).

$$S_n=2^n\times\left(2^{n+1}-1\right) \text{ ou } S_n=2^{2n+1}-2^n \quad \text{(une seule égalité)}$$

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\left(2^n\times 2^k\right)$$

$$=2^n\times\left(\sum_{k=0}^{k=n}2^k\right)$$ (on « sort », ou plutôt on met en facteur 2^n dans la somme car 2^n ne dépend pas de k)

$$=2^n\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$ (on applique la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}q^k=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ valable pour tout réel $q\neq 1$)

$$=2^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$=2^{2n+1}-2^n$$

Pour $n=3$, le résultat fourni par cette formule coïncide bien avec celui trouvé à la main à la question 1°).

Autres méthodes :

① On écrit la somme sous forme développée.

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad S_n=2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+\ldots+2^{2n}$$
$$=2^n\times\left(1+2^1+2^2+\ldots+2^n\right)$$
$$=2^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$
$$=2^{2n+1}-2^n$$

② On effectue un changement de variable : $S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n}2^k$.

La suite $\left(2^k\right)$ est une suite géométrique donc $S_n=2^n\times\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}$.