TS1

Contrôle du samedi 7 octobre 2017 (2 heures)

Prénom et nom : ………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

I. (2 points : 1 point + 1 point)

Déterminer les réels x et y tels que $(1+2\mathrm{i})^2 x-\dfrac{y}{1-\mathrm{i}}=1-13\mathrm{i}$.

Écrire deux égalités sans justifier.

………………………… …………………………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit a un réel fixé.

On considère les équations $z^3+az=0$ (1) et $\dfrac{1}{z-\mathrm{i}a}+\dfrac{1}{z+\mathrm{i}a}=1$ (2) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Compléter les phrases suivantes sans justifier.

On donnera les expressions des solutions sous la forme la plus simple possible.

1°) On suppose que a est un réel strictement positif quelconque.

Les solutions de (1) sont : ……………………..……………………………………………………………..

2°) On suppose que a est un réel quelconque de $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

Les solutions de (2) sont : ……………………..……………………………………………………………..

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points + 1 point)

On considère le polynôme $P(z)=z^4-(2+2\mathrm{i})z^3+(4+4\mathrm{i})z^2+(2-10\mathrm{i})z-5$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Calculer $P(\mathrm{i})$.

……………………………… (une seule égalité sans justifier)

2°) Déterminer un polynôme $Q(z)$ du second degré tel que pour tout nombre complexe z on ait : $P(z)=(z-\mathrm{i})^2\times Q(z)$. En déduire les racines de $P(z)$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 2n - 1$ pour tout entier naturel *n*. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n + n$.
Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de *n*.
Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1)$

$=$

$=$

$=$

$=$

2°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.
« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

……

……

3°) À l'aide du résultat précédent, déterminer l'expression de u_n en fonction de *n*.

……

……

……

……

……

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2nu_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*. Répondre sans justifier. ……………….. (une seule égalité)

2°) On considère l'algorithme ci-contre qui fait intervenir les variables *a* (réel strictement positif), *u* (réel) et *n* (entier naturel). Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Faire fonctionner l'algorithme « à la main » pour $a = 100$ saisi en entrée.

La valeur de *n* affichée en sortie est ……………..

Entrée :
Saisir *a*

Initialisation :
u prend la valeur 1
n prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $u \leqslant a$ **Faire**
    u prend la valeur $2nu$
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

VI. (2 points)

Démontrer que pour tout nombre complexe *z* qui n'est pas imaginaire pur, on a : $\dfrac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{\left(\mathrm{Re}\, z\right)^2} \leqslant 1$.

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 7-10-2017

I.

Déterminer les réels x et y tels que $(1+2\mathrm{i})^2 x-\dfrac{y}{1-\mathrm{i}}=1-13\mathrm{i}$.

Écrire deux égalités sans justifier.

$x=-2$ $\qquad\qquad$ $y=10$

Déterminons les réels x et y tels que $(1+2\mathrm{i})^2 x-\dfrac{y}{1-\mathrm{i}}=1-13\mathrm{i}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow (-3+4\mathrm{i})x-\frac{y(1+\mathrm{i})}{2}=1-13\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \left(-3x-\frac{y}{2}\right)+\mathrm{i}\left(4x-\frac{y}{2}\right)=1-13\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-\dfrac{y}{2}=1 \\ 4x-\dfrac{y}{2}=-13 \end{cases} \quad \text{(système obtenu par identification des parties réelle et imaginaire)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x=-14 \\ y=-6x-2 \end{cases} \quad \text{(on a fait une soustraction membre à membre : deuxième équation – première équation)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=10 \end{cases}$$

II.

Soit a un réel fixé.

On considère les équations $z^3+az=0$ (1) et $\dfrac{1}{z-\mathrm{i}a}+\dfrac{1}{z+\mathrm{i}a}=1$ (2) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Compléter les phrases suivantes sans justifier.

On donnera les expressions des solutions sous la forme la plus simple possible.

1°) On suppose que a est un réel strictement positif quelconque.

Les solutions de (1) sont 0, $\mathrm{i}\sqrt{a}$, $-\mathrm{i}\sqrt{a}$.

$$(1) \Leftrightarrow z(z^2+a)=0$$
$$\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z^2+a=0$$
$$\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z^2=-a$$
$$\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=\mathrm{i}\sqrt{a} \text{ ou } z=-\mathrm{i}\sqrt{a} \quad (\text{car } a>0 \text{ par hypothèse})$$

2°) On suppose que a est un réel quelconque de $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

Les solutions de (2) sont $1+\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$.

On résout l'équation (2) dans $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}a\,;\mathrm{i}a\}$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{z+\cancel{\mathrm{i}a}+z\cancel{-\mathrm{i}a}}{(z-\mathrm{i}a)(z+\mathrm{i}a)}=1 \quad \text{(on écrit le premier membre sous forme d'un seul quotient)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{(z-\mathrm{i}a)(z+\mathrm{i}a)}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2z}{z^2+a^2}=1$$
$$\Leftrightarrow 2z=z^2+a^2$$
$$\Leftrightarrow z^2-2z+a^2=0$$

On considère le polynôme z^2-2z+a^2 avec $z\in\mathbb{C}$.
Il s'agit d'un polynôme du second degré à coefficients réels.

On calcule son discriminant réduit $\Delta'=1-a^2$.

Comme $a\in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$, $a^2>1$ donc $\Delta'<0$.

Le polynôme admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$ qui sont conjuguées : $z_1=1+\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$ et $z_2=1-\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$.

Ces deux racines ne sont pas imaginaires pures donc elles sont toutes deux distinctes de $\mathrm{i}a$ et $-\mathrm{i}a$.

Les solutions de (2) sont donc $1+\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$.

III.

On considère le polynôme $P(z)=z^4-(2+2\mathrm{i})z^3+(4+4\mathrm{i})z^2+(2-10\mathrm{i})z-5$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Calculer $P(\mathrm{i})$.

$P(\mathrm{i})=0$ (une seule égalité sans justifier)

On effectue le calcul à la main et l'on vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

2°) Déterminer un polynôme $Q(z)$ du second degré tel que pour tout nombre complexe z on ait :
$P(z)=(z-\mathrm{i})^2\times Q(z)$. En déduire les racines de $P(z)$.

On va utiliser la méthode des coefficients indéterminés.

On peut écrire $Q(z)=\dfrac{P(z)}{(z-\mathrm{i})^2}$ pour tout nombre complexe $z\neq\mathrm{i}$ mais cela ne conduit à rien.

On pose $Q(z)=az^2+bz+c$ où a, b, c sont trois complexes tels que $a\neq 0$.
On développe, on réduit et on ordonne le polynôme $(z-\mathrm{i})^2\times Q(z)$.
On fait précéder les calculs de « $\forall z\in\mathbb{C}$ ».

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad (z-\mathrm{i})^2\times Q(z)=az^4+bz^3+(a+c)z^2+bz+c$$

$$=(z^2-2\mathrm{i}z-1)(az^2+bz+c)$$

$$=az^4+bz^3+cz^2-2\mathrm{i}az^3-2\mathrm{i}bz^2-2\mathrm{i}cz-az^2-bz-c$$

$$=az^4+(b-2\mathrm{i}a)z^3+(c-2\mathrm{i}b-a)z^2-(b+2\mathrm{i}c)z-c$$

On reprend l'expression de $P(z)$ donnée initialement : $P(z)=z^4-(2+2\mathrm{i})z^3+(4+4\mathrm{i})z^2+(2-10\mathrm{i})z-5$.

Pour que $P(z)=(z-\mathrm{i})^2\times Q(z)$ pour tout nombre complexe z, il suffit de choisir a, b, c vérifiant les égalités ci-dessous [identification des coefficients des monômes de même degré].

$$\begin{cases} a=1\\ b-2\mathrm{i}a=-2-2\mathrm{i}\\ c-2\mathrm{i}b-a=4+4\mathrm{i}\\ -b-2\mathrm{i}c=2-10\mathrm{i}\\ -c=-5\end{cases}$$

On écrit le système d'équations vérifiées par le triplet $(a\,;b\,;c)$ sans z.

La première équation donne $a=1$, la deuxième équation donne alors $b=-2$.
La troisième équation donne immédiatement $c=5$.

Les équations $c-2\mathrm{i}b-a=4+4\mathrm{i}$ et $-b-2\mathrm{i}c=2-10\mathrm{i}$ sont vérifiées.

Ainsi, on a $\begin{cases} a=1\\ b=-2\\ c=5\end{cases}$ et on obtient ainsi $Q(z)=z^2-2z+5$.
On s'aperçoit que a, b, c sont des réels ce qui n'était pas prévisible au début.

On en déduit la factorisation suivante de $P(z)$ en produit de deux polynômes du second degré :

$$P(z)=(z-\mathrm{i})^2\times(z^2-2z+5).$$

Remarques :
On aurait aussi pu déterminer $Q(z)$ en effectuant la division euclidienne de $P(z)$ par $(z-\mathrm{i})^2=z^2-2\mathrm{i}z-1$.

On peut aussi trouver le polynôme $Q(z)$ par tâtonnement.

Pour déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$, on cherche les racines du polynôme $Q(z)=z^2-2z+5$.

$Q(z)$ est un polynôme du second degré à coefficients réels.
On calcule son discriminant réduit $\Delta'=1-5=-4$.

Les racines de $Q(z)$ sont donc $1-2\mathrm{i}$ et $1+2\mathrm{i}$.

On en déduit que les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$ sont i, $1-2\mathrm{i}$, $1+2\mathrm{i}$.

On peut aussi utiliser la calculatrice pour déterminer les racines de $Q(z)$.
Cependant, comme les coefficients sont complexes, la calculatrice ne permet pas de déterminer les racines de $P(z)$.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=3u_n+2n-1$ pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n+n$.
Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.
Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

$u_1=5$, $u_2=16$, $u_3=51$, $u_4=158$, $u_5=481$

$v_0=2$, $v_1=6$, $v_2=18$, $v_3=54$, $v_4=162$, $v_5=486$

On peut conjecturer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.

On peut présenter les résultats dans un tableau comme ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	5	16	51	158	481
v_n	2	6	18	54	162	486

On peut utiliser la calculatrice pour obtenir les tableaux de valeurs (on met la calculatrice en mode « suite »).

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=u_{n+1}+(n+1)$$

$$=3u_n+2n-1+n+1$$

$$=3u_n+3n$$

$$=3(u_n+n)$$

$$=3v_n$$

2°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.
« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 = 2$ et de raison 3.

3°) À l'aide du résultat précédent, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2 \times 3^n$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n - n$.

Finalement, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n - n$.

V.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2nu_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n. Répondre sans justifier. ………………..… (une seule égalité)

On calcule les premiers termes de la suite pour avoir une idée de l'expression.

$u_2 = 2 \times 1$

$u_3 = 2^2 \times 2 \times 1$

$u_4 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 1$

$u_5 = 2^4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2^{n-1} \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$.

On peut donc utiliser la notation la factorielle et conjecturer l'expression $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2^{n-1} \times (n-1)!$.

Cette expression peut se démontrer aisément par récurrence.

2°) On considère l'algorithme ci-contre qui fait intervenir les variables a (réel strictement positif), u (réel) et n (entier naturel). Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Faire fonctionner l'algorithme « à la main » pour $a = 100$ saisi en entrée.

La valeur de n affichée en sortie est 5.

Entrée :
Saisir a

Initialisation :
u prend la valeur 1
n prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $u \leqslant a$ **Faire**
  u prend la valeur $2nu$
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

On remplit au brouillon un tableau d'évolution des variables n et u comme ci-dessous.

Étape	0	1	2	3	4	5
Condition $u \leqslant 100$		vraie	vraie	vraie	vraie	faux
Valeur de u	1	2	8	48	384	
Valeur de n	1	2	3	4	5	

La valeur de n affichée en sortie est 5.

VI.

Démontrer que pour tout nombre complexe z qui n'est pas imaginaire pur, on a : $\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{(\mathrm{Re}\, z)^2} \leqslant 1$.

Il s'agit d'un petit exercice avec prise d'initiative (EPI).

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.

$z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ donc $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$.

On a donc $\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{(\mathrm{Re}\, z)^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2}$.

1ère méthode :

On a $x^2 - y^2 \leqslant x^2$ donc en divisant les deux membres par x^2 qui est strictement positif, on obtient $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2} \leqslant 1$ soit $\dfrac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{\left(\mathrm{Re}\, z\right)^2} \leqslant 1$.

2e méthode :

On peut écrire $\dfrac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{\left(\mathrm{Re}\, z\right)^2} = 1 - \dfrac{y^2}{x^2} = 1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$.

On obtient immédiatement $\dfrac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{\left(\mathrm{Re}\, z\right)^2} \leqslant 1$ car le carré d'un réel est positif ou nul.

L'inégalité est une égalité dans le cas où z est un réel et uniquement dans ce cas.
La démonstration est très facile.

Variante :

On peut ne pas poser $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
On peut se contenter d'écrire $z = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z$ mais c'est un peu plus lourd pour la suite des calculs.