TS1

Contrôle du mardi 3 octobre 2017
(1 h 15 min)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = a$ où a est un réel non nul et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{nu_n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_5 en fonction de a.

…………………………… (une seule égalité)

2°) Dans cette question, on prend $a = 20$.
« Rentrer » la suite $\left(u_n\right)$ dans la calculatrice puis donner la valeur arrondie au millième de u_{50}.

La valeur arrondie au millième de u_{50} est égale à ………………… .

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{n-1}{n+1}$. On attend 4 étapes de calcul.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 =$ ……………………………………………………

$=$ ……………………………………………………

$=$ ……………………………………………………

$=$ ……………………………………………………

2°) À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.
On attend une justification précise.

……

……

……

……

……

III. (2 points)

On considère une suite géométrique $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ de raison – 4 telle que $u_4 = 25$.

Calculer la somme $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{16}$.

$S =$ ………………………………………………………… (un seul résultat)

IV. (2 points)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - 2^n$ pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Parmi les expressions suivantes, laquelle est une expression simplifiée de S_n en fonction de n ?
Cocher la case correspondant à l'expression choisie. Justifier par un calcul sur les lignes ci-dessous.

☐ $n+1-2^{n+1}$ ☐ $n-2^{n+1}$ ☐ $n+2-2^{n+1}$ ☐ $n+1-2^n$

……

……

……

……

V. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points + 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation $u_{n+1} + u_n = 3 \times (-1)^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_2 « à la main ».

……..

……..

……..

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice puis donner la valeur de u_{100}.

……………………………………………………………………… (une seule égalité)

3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = (-1)^n u_n$.
Démontrer que pour tout entier naturel *n*, la différence $v_{n+1} - v_n$ est constante.
En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) On considère l'algorithme ci-dessous. Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.
On précise que la variable *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n = 4$ en entrée.
On complètera le tableau suivant d'évolution des variables *i* et *u*.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 1

Traitement :
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
 | *u* prend la valeur 2*iu*
FinPour

Sortie :
Afficher *u*

i		1	2	3	4
u	1				

La valeur de *u* affichée en sortie est égale à …………………………………….. .

2°) Exprimer la valeur de *u* affichée en sortie en fonction de *n*.
Aucune justification n'est demandée.

…………………………………….. (une seule expression sans égalité)

Bonus sur 1 point

On reprend la suite (u_n) de l'exercice **IV**. Pour tout entier naturel *n*, on pose $S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} (u_k)^2$.

Déterminer une expression simplifiée de S'_n en fonction de *n*.

…………………………………………………..……….. (une seule égalité)

Corrigé du contrôle du 3-10-2017

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = a$ où a est un réel non nul et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{nu_n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_5 en fonction de a.

$$u_5 = \frac{3a}{8} \text{ (une seule égalité)}$$

$u_2 = \dfrac{1}{a}$

$u_3 = \dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{a}} = \dfrac{a}{2}$

$u_4 = \dfrac{1}{3\times\dfrac{a}{2}} = \dfrac{2}{3a}$

$u_5 = \dfrac{1}{4\times\dfrac{2}{3a}} = \dfrac{3a}{8}$

2°) Dans cette question, on prend $a = 20$.
« Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice puis donner la valeur arrondie au millième de u_{50}.

La valeur arrondie au millième de u_{50} est égale à 0,009.

On rentre la suite dans la calculatrice puis on tape $\mathrm{u}(50)$ à l'écran.

Calculatrice TI Premium CE :

$n\mathrm{Min} = 1$
$\mathrm{u}(n) = 1/\big((n-1)*\mathrm{u}(n-1)\big)$
$\mathrm{u}(n\mathrm{Min}) = 20$

$n\mathrm{Min} = 1$
$\mathrm{u}(n+1) = 1/\big(n*\mathrm{u}(n)\big)$
$\mathrm{u}(n\mathrm{Min}) = 20$

On obtient l'affichage 0,0089066886.

Calculatrice Numworks :

$u_{n+1} = \dfrac{1}{nu_n}$
$u_0 =$

Il faut cliquer sur u_0.
Indice premier terme
Taper 1 puis sur la touche $\boxed{\text{EXE}}$ puis touche de retour.
Pour avoir u_{50}, on règle l'intervalle 50-50.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{n-1}{n+1}$. On attend 4 étapes de calcul.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} - 1$

$= \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} - 1 \quad$ (on écrit $\dfrac{2^{n+1}}{2^n} = \dfrac{2\times\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = 2$)

$= \dfrac{2n}{n+1} - 1$

$= \dfrac{n-1}{n+1}$

2°) À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
On attend une justification précise.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \; n-1 \geqslant 0$ et $n+1 > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \dfrac{n-1}{n+1} \geqslant 0$.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geqslant 0$ ce qui est équivalent à $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \geqslant 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n > 0$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 1.

Commentaire : La méthode par étude de fonction pour étudier le sens de variation de (u_n) n'aurait pas fonctionné car on ne connaît pas la fonction $x \mapsto \dfrac{2^x}{x}$).

III.

On considère une suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ de raison – 4 telle que $u_4 = 25$.

Calculer la somme $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{16}$.

$S = 335\ 544\ 325$ (un seul résultat)

Il y a deux méthodes.

1[ère] méthode : utilisation de la formule de sommation pour les termes consécutifs d'une suite géométrique

$$S = u_4 \times \frac{1-(-4)^{13}}{1-(-4)} \quad \text{(la somme comporte 13 termes)}$$

$$= 25 \times \frac{1+4^{13}}{5}$$

$$= 5 \times \left(4^{13}+1\right)$$

$$= 335\ 544\ 325$$

2[e] méthode : On calcule tous les termes de la suite de u_4 à u_{16}.

Cette méthode est un peu fastidieuse. Mieux vaut éviter de la faire.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - 2^n$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Parmi les expressions suivantes, laquelle est une expression simplifiée de S_n en fonction de *n* ?

Cocher la case correspondant à l'expression choisie. Justifier par un calcul sur les lignes ci-dessous.

☐ $n+1-2^{n+1}$ ☐ $n-2^{n+1}$ ☒ $n+2-2^{n+1}$ ☐ $n+1-2^n$

On n'est pas dans le cas de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

En effet, la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

On ne peut donc pas utiliser de formule.

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(1-2^k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{k=n} 1\right) - \left(\sum_{k=0}^{k=n} 2^k\right) \quad \text{(on sépare la somme en deux)}$$

$$= (n+1) - \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

$$= (n+1) - 2^{n+1} + 1$$

$$= n + 2 - 2^{n+1}$$

On peut par exemple calculer S_2, S_3, S_4 à la main et vérifier que le résultat obtenu coïncide bien avec celui que l'on obtiendrait avec la formule que l'on vient de démontrer.

Pour $n = 3$, on va calculer $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.

Par un calcul de tête immédiat, on trouve $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = -3$, $u_3 = -7$ donc $S_3 = -11$.

Par ailleurs, $3 + 2 - 2^4 = 5 - 16 = -11$.

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation $u_{n+1} + u_n = 3 \times (-1)^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_2 « à la main ».

$u_1 + u_0 = 3$ d'où $u_1 = 3 - 5 = -2$

$u_2 + u_1 = -3$ d'où $u_2 = -3 + 2 = -1$

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice puis donner la valeur de u_{100}.

$u_{100} = -295$ (une seule égalité)

3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = (-1)^n u_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, la différence $v_{n+1} - v_n$ est constante.

En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} u_{n+1} - (-1)^n u_n$

$= (-1)^{n+1} u_{n+1} + (-1) \times (-1)^n u_n$

$= (-1)^{n+1} u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_n$

$= (-1)^{n+1} (u_{n+1} + u_n)$

$= (-1)^{n+1} \times 3 \times (-1)^n$

$= (-1)^n \times (-1) \times 3 \times (-1)^n$

$= -3$ car $(-1)^n \times (-1)^n = 1$

On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique de raison – 3.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 5 - 3n$ car $v_0 = u_0 = 5$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n \, u_n = 5 - 3n$ ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{5-3n}{(-1)^n}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n (5-3n)$.

En effet, $\dfrac{1}{(-1)^n} = \dfrac{1^n}{(-1)^n} = \left(\dfrac{1}{-1}\right)^n = (-1)^n$.

Avec cette formule on retrouve la valeur de u_{100} obtenue par la calculatrice dans la question 2°).

$u_{100} = (-1)^{100} (5 - 3 \times 100) = -295$

VI.

1°) On considère l'algorithme ci-dessous. Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.
On précise que la variable *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n = 4$ en entrée.
On complètera le tableau suivant d'évolution des variables *i* et *u*.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 1

Traitement :
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
| *u* prend la valeur 2*iu*
FinPour

Sortie :
Afficher *u*

i		1	2	3	4
u	1	2	8	48	384

La valeur de *u* affichée en sortie est égale à 384.

2°) Exprimer la valeur de *u* affichée en sortie en fonction de *n*.
Aucune justification n'est demandée.

$2^n \times n!$ (une seule expression sans égalité)

La valeur finale de la variable *u* qui s'affiche en sortie s'obtient en effectuant le calcul suivant :
$(2\times1)\times(2\times2)\times\ldots\times(2\times n) = (1\times2\times\ldots\times n)\times(2\times2\times\ldots\times2)$ [les produits dans chaque parenthèse comportent *n* facteurs]

$= n! \times 2^n$ [on utilise la notation de la factorielle pour écrire le premier produit]

Bonus sur 1 point

On reprend la suite (u_n) de l'exercice **IV**. Pour tout entier naturel *n*, on pose $S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} (u_k)^2$.

Déterminer une expression simplifiée de S'_n en fonction de *n*.

$S'_n = n + \dfrac{8}{3} - 2^{n+2} + \dfrac{4^{n+1}}{3}$ (une seule égalité)

$$S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(1-2^k\right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(1-2\times 2^k + 4^k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{k=n} 1\right) - 2\left(\sum_{k=0}^{k=n} 2^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{k=n} 4^k\right) \qquad \text{(on sépare la somme en trois)}$$

$$= n+1-2\left(2^{n+1}-1\right)+\frac{4^{n+1}-1}{3}$$

$$= n+1-2^{n+2}+2+\frac{4^{n+1}-1}{3}$$

$$= n+\frac{8}{3}-2^{n+2}+\frac{4^{n+1}}{3}$$