TS1

Contrôle du vendredi 22 septembre 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……. / 20

Il est demandé que tous les traits de fractions soient faits à la règle.

I. (5 points : 1°) a) 1 point ; b) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{\left(\overline{z_n}\right)^2}{z_n + \mathrm{i}}$.

Les deux questions sont indépendantes.
On pourra vérifier les résultats à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice.

1°) Dans cette question, on prend $z_0 = 1$.

a) L'affirmation « z_1 et z_2 sont conjugués l'un de l'autre » est-elle vraie ou fausse ? Répondre sans justifier.

…………… (une seule réponse sans faire de phrase)

b) Calculer z_3. On donnera sans justifier le résultat sous forme algébrique.

………………………………….. (une seule égalité sans faire de phrase)

2°) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on note A et B les points d'affixes respectives z_0 et z_1. Dans chaque cas, on prend une valeur différente de z_0. Cocher la case correcte.

1^{er} cas : On prend $z_0 = -2\mathrm{i}$.	2^e cas : On prend $z_0 = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.
☐ B est le symétrique de A par rapport à O.	☐ B est le symétrique de A par rapport à O.
☐ A est le symétrique de O par rapport à B.	☐ A est le symétrique de O par rapport à B.
☐ B est le symétrique de O par rapport à A.	☐ B est le symétrique de O par rapport à A.

II. (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z + (1-2\mathrm{i})\overline{z} - 15 = \mathrm{i}$ (E).
On donne ci-contre le modèle de rédaction attendu à recopier et compléter (ne rien écrire dans le cadre).

On notera que la résolution s'effectuera en utilisant une chaîne d'équivalences du début à la fin.
Le détail de la résolution du système n'est pas demandé.
Pour l'écriture de l'ensemble S, on rappelle que l'on cherche z.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.
On a alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

(E) $\Leftrightarrow$ …………………
$\vdots$
$\Leftrightarrow z =$ ……..

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$S =$ ………………..

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point pour l'égalité + 2 points pour le système complet ; 3°) 1 point)

On considère le polynôme $P(z)=z^4-2z^3+11z^2-2z+10$ où $z\in\mathbb{C}$.

1°) Calculer $P(\mathrm{i})$ et $P(-\mathrm{i})$. On attend uniquement les résultats.

$P(\mathrm{i})=$............	$P(-\mathrm{i})=$............

2°) Le but de cette question est de déterminer un polynôme $Q(z)$ du second degré tel que $P(z)=(z^2+1)\times Q(z)$ pour tout nombre complexe z.

On pose $Q(z)=az^2+bz+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.
Développer, réduire et ordonner le polynôme $(z^2+1)\times Q(z)$.
Écrire le résultat sur la ligne ci-dessous sous la forme d'une seule égalité précédée de « $\forall z\in\mathbb{C}$ ».

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

Écrire dans le cadre ci-dessous le système d'équations vérifiées par le triplet $(a\,;b\,;c)$ (sans z !).

Écrire ci-dessous les valeurs de a, b, c (une égalité par case).

…………………	…………………	…………………

3°) À l'aide de la question précédente, déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$.

Les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$ sont …………………………………………………... .

Vérifier la réponse à l'aide de la calculatrice.

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 1 point)

À tout nombre complexe z distinct de – i on associe le nombre complexe $z'=\dfrac{\left(\overline{z}\right)^2}{z+\mathrm{i}}$.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on suppose que $z=\mathrm{i}\lambda$ où λ est un réel distinct de – 1. Aucune justification n'est demandée.

Donner la forme algébrique de z' en fonction de λ.

…………………………………….. (une seule égalité)

2°) Dans cette question, on suppose que $z=1+\mathrm{i}\lambda$ où λ est un réel quelconque.

a) Déterminer l'écriture algébrique du nombre $u=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}(\lambda+1)}$. Il n'est pas demandé de développer le dénominateur.

……………………………………………………………….. (une seule égalité)

b) Exprimer en fonction de λ la partie réelle de z'. Il n'est pas demandé de développer le dénominateur.
Écrire ci-dessous l'égalité $\mathrm{Re}\,z'=$.................... et détailler les principales étapes de calcul sur les lignes ci-dessous.

……………………………………………………………..

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

………………………………………………………………..………………………………………………………..……

Corrigé du contrôle du 22-9-2017

I.

On considère la suite complexe (z_n) définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{\left(\overline{z_n}\right)^2}{z_n + \mathrm{i}}$.

Les deux questions sont indépendantes.
On pourra vérifier les résultats à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice.

1°) Dans cette question, on prend $z_0 = 1$.

a) L'affirmation « z_1 et z_2 sont conjugués l'un de l'autre » est-elle vraie ou fausse ? Répondre sans justifier.

vrai (une seule réponse sans faire de phrase)

$$z_1 = \frac{\left(\overline{z_0}\right)^2}{z_0 + \mathrm{i}} = \frac{\left(1\right)^2}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$$

$$z_2 = \frac{\left(\overline{z_1}\right)^2}{z_1 + \mathrm{i}} = \frac{\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^2}{\dfrac{1-\mathrm{i}}{2} + \mathrm{i}} = \frac{\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^2}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}} = \frac{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} \times \dfrac{\cancel{1+\mathrm{i}}}{\cancel{2}}}{\dfrac{\cancel{1+\mathrm{i}}}{\cancel{2}}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$$

On peut obtenir les deux résultats immédiatement à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice.
On tape 1 suivi de $\boxed{\text{entrer}}$ puis (conj(Rep))^2/(Rep + i).

On observe immédiatement que $z_2 = \overline{z_1}$.

b) Calculer z_3. On donnera sans justifier le résultat sous forme algébrique.

$z_3 = \dfrac{-3-\mathrm{i}}{10}$ (une seule égalité sans faire de phrase)

On peut obtenir le résultat immédiatement à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice ou bien en effectuant le calcul à la main.

$$z_3 = \frac{\left(\overline{z_2}\right)^2}{z_2 + \mathrm{i}} = \frac{\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} + \mathrm{i}} = \frac{\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2}{\dfrac{1+3\mathrm{i}}{2}} = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{4} \times \frac{2}{1+3\mathrm{i}} = \frac{-\cancel{2}\mathrm{i}}{\cancel{2}} \times \frac{1}{1+3\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}(1-3\mathrm{i})}{10} = \frac{-3-\mathrm{i}}{10}$$

2°) Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A et B les points d'affixes respectives z_0 et z_1. Dans chaque cas, on prend une valeur différente de z_0. Cocher la case correcte.

1^er^ cas : On prend $z_0 = -2\mathrm{i}$.	2^e^ cas : On prend $z_0 = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.
☐ B est le symétrique de A par rapport à O.	☒ B est le symétrique de A par rapport à O.
☐ A est le symétrique de O par rapport à B.	☐ A est le symétrique de O par rapport à B.
☒ B est le symétrique de O par rapport à A.	☐ B est le symétrique de O par rapport à A.

1^er^ cas : $z_0 = -2\mathrm{i}$

$$z_1 = \frac{(2\mathrm{i})^2}{-2\mathrm{i}+\mathrm{i}}$$

$$= \frac{-4}{-\mathrm{i}}$$

$$= -4\mathrm{i}$$

On observe que $z_1 = 2z_0$ soit $z_\mathrm{B} = 2z_\mathrm{A}$.
Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et par suite, B est le symétrique de O par rapport à A.

Pour placer les points A et B dans le plan complexe, on se réfère à la définition de l'affixe d'un point.
Dans ce 1^er^ cas, A a pour coordonnées cartésiennes $(0\,;-2)$ et B a pour coordonnées cartésiennes $(0\,;-4)$.

2^e^ cas : $z_0 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$

$$z_1 = \frac{\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2}{-\frac{\mathrm{i}}{2}+\mathrm{i}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\mathrm{i}}{2}}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}$$

On observe que $z_1 = -z_0$ soit $z_\mathrm{B} = -z_\mathrm{A}$.
Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et par suite, B est le symétrique de A par rapport à O.

On peut faire un petit graphique dans chaque cas pour vérifier les résultats.

II.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z + (1-2\mathrm{i})\overline{z} - 15 = \mathrm{i}$ (E).
On donne ci-contre le modèle de rédaction attendu à recopier et compléter (ne rien écrire dans le cadre).

On notera que la résolution s'effectuera en utilisant une chaîne d'équivalences du début à la fin.
Le détail de la résolution du système n'est pas demandé.
Pour l'écriture de l'ensemble *S*, on rappelle que l'on cherche *z*.

> On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.
> On a alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.
>
> (E) $\Leftrightarrow$ …………………
> ⋮
> $\Leftrightarrow z =$ ....
>
> Soit *S* l'ensemble des solutions de (E).
>
> $S =$ ....

(E) $\Leftrightarrow \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) + (1-2\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) - 15 = \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}x - y + x - \mathrm{i}y - 2\mathrm{i}x - 2y - 15 = \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow (x - 3y - 15) - \mathrm{i}(x+y) = \mathrm{i}$ (on écrit le membre de gauche sous forme algébrique)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 15 = 0 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ (système linéaire de déterminant – 4 donc admettant une unique solution)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 15 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$ (résolution immédiate du système par la calculatrice ou à la main ; dans le dernier cas, il est conseillé la méthode de combinaison dont l'une des étapes consiste à additionner membre à membre les deux équations pour trouver la valeur de *y*)

$\Leftrightarrow z = 3 - 4\mathrm{i}$ [ligne indispensable : c'est *z* qu'on cherche et non $\overline{z}$]

Soit *S* l'ensemble des solutions de (E).

$$S = \{3 - 4\mathrm{i}\}$$

III.

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 2z + 10$ où $z \in \mathbb{C}$.

1°) Calculer $P(\mathrm{i})$ et $P(-\mathrm{i})$. On attend uniquement les résultats.

$P(\mathrm{i}) = 0$	$P(-\mathrm{i}) = 0$

On peut effectuer les deux calculs à la main ou à la calculatrice.

$$P(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^4 - 2\mathrm{i}^3 + 11\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i} + 10 = 1 - 2\times(-\mathrm{i}) - 11 - 2\mathrm{i} + 10 = 0$$

$$P(-\mathrm{i}) = (-\mathrm{i})^4 - 2(-\mathrm{i})^3 + 11(-\mathrm{i})^2 - 2(-\mathrm{i}) + 10 = 1 - 2\times \mathrm{i} - 11 + 2\mathrm{i} + 10 = 0$$

Remarque :
On peut démontrer aisément que, comme les coefficients du polynôme $P(z)$ sont réels, $\forall z \in \mathbb{C}\ \ P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.
Ce résultat donne immédiatement $P(-\mathrm{i}) = 0$ puisque – i est le conjugué de i.

2°) Le but de cette question est de déterminer un polynôme $Q(z)$ du second degré tel que $P(z) = (z^2+1)\times Q(z)$ pour tout nombre complexe *z*.

On pose $Q(z) = az^2 + bz + c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $a \neq 0$.
Développer, réduire et ordonner le polynôme $(z^2+1)\times Q(z)$.
Écrire le résultat sur la ligne ci-dessous sous la forme d'une seule égalité précédée de « $\forall z \in \mathbb{C}$ ».

$\forall z \in \mathbb{C}\ \ (z^2+1)\times Q(z) = az^4 + bz^3 + (a+c)z^2 + bz + c$

Écrire dans le cadre ci-dessous le système d'équations vérifiées par le triplet $(a\,;b\,;c)$ (sans *z* !).

On reprend l'expression de $P(z)$ et on identifie les coefficients des monômes de même degré.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ a + c = 11 \\ b = -2 \\ c = 10 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ a + c = 11 \\ c = 10 \end{cases}$$

Pour que $P(z) = (z^2+1)\times Q(z)$ pour tout nombre complexe, il suffit de choisir *a*, *b*, *c* vérifiant les égalités ci-dessous.

Écrire ci-dessous les valeurs de *a*, *b*, *c* (une égalité par case).

$a = 1$	$b = -2$	$c = 10$

Les valeurs de *a*, *b*, *c*. apparaissent immédiatement dans le système.

On doit juste s'assurer que la troisième équation est bien vérifiée.

On a donc $Q(z) = z^2 - 2z + 10$.

On obtient la factorisation de $P(z)$ en produit de deux polynômes du second degré :

$$P(z) = (z^2+1)\times(z^2 - 2z + 10).$$

Remarque : On aurait aussi pu déterminer $Q(z)$ en effectuant la division euclidienne de $P(z)$ par z^2+1.

3°) À l'aide de la question précédente, déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$.
Vérifier la réponse à l'aide de la calculatrice.

Les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$ sont i, – i, $1-3\mathrm{i}$, $1+3\mathrm{i}$.

On cherche les racines du polynôme z^2+1 et du polynôme $z^2 - 2z + 10$.
Celles de z^2+1 sont i et – i par calcul immédiat (résolution de l'équation $z^2 = -1$).
Celles de $z^2 - 2z + 10$ s'obtiennent en calculant le discriminant réduit.

On vérifie la réponse avec la calculatrice.

IV.

À tout nombre complexe *z* distinct de – i on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{(\overline{z})^2}{z+\mathrm{i}}$.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on suppose que $z = \mathrm{i}\lambda$ où λ est un réel distinct de – 1. Aucune justification n'est demandée.

Donner la forme algébrique de z' en fonction de λ.

$z' = \dfrac{\mathrm{i}\lambda^2}{\lambda+1}$ (une seule égalité)

$$z'=\frac{\left(\overline{\mathrm{i}\lambda}\right)^2}{\mathrm{i}\lambda+\mathrm{i}}$$

$$=\frac{\left(-\mathrm{i}\lambda\right)^2}{\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)}$$ (car le conjugué de $\mathrm{i}\lambda$ est égal à $-\mathrm{i}\lambda$)

$$=\frac{-\lambda^2}{\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)}$$

$$=\frac{-\lambda^2\times\mathrm{i}}{\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)\times\mathrm{i}}$$

$$=\frac{-\mathrm{i}\lambda^2}{-\left(\lambda+1\right)}$$

$$=\frac{\mathrm{i}\lambda^2}{\lambda+1}$$ (qu'on peut aussi écrire $\mathrm{i}\frac{\lambda^2}{\lambda+1}$)

On observe que le résultat est un imaginaire pur car $\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\in\mathbb{R}$.

2°) Dans cette question, on suppose que $z=1+\mathrm{i}\lambda$ où λ est un réel quelconque.

a) Déterminer l'écriture algébrique du nombre $u=\frac{1}{1+\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)}$. Il n'est pas demandé de développer le dénominateur.

$$u=\frac{1-\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)}{1+\left(\lambda+1\right)^2}$$ (une seule égalité)

$$u=\frac{1\times\left[1-\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)\right]}{\left[1+\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)\right]\times\left[1-\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)\right]}$$

$$=\frac{1-\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)}{1+\left(\lambda+1\right)^2}$$

b) Exprimer en fonction de λ la partie réelle de z'. Il n'est pas demandé de développer le dénominateur.
Écrire ci-dessous l'égalité $\mathrm{Re}\,z'=$ .... et détailler les principales étapes de calcul sur les lignes ci-dessous.

$$\mathrm{Re}\,z'=\frac{1-2\lambda-3\lambda^2}{1+\left(\lambda+1\right)^2}$$

$$z'=\frac{\left(\overline{1+\mathrm{i}\lambda}\right)^2}{1+\mathrm{i}\lambda+\mathrm{i}}$$

$$=\frac{\left(1-\mathrm{i}\lambda\right)^2}{1+\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)}$$

$$=\left(1-2\mathrm{i}\lambda-\lambda^2\right)\times u$$

$$=\left(1-2\mathrm{i}\lambda-\lambda^2\right)\times\frac{1-\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)}{1+\left(\lambda+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left[\left(1-\lambda^2\right)-2\mathrm{i}\lambda\right]\left[1-\mathrm{i}\left(\lambda+1\right)\right]}{1+\left(\lambda+1\right)^2}$$

Par un développement « intelligent » du produit figurant au numérateur, on obtient aisément la partie réelle de z'.

$$\mathrm{Re}\,z'=\frac{\left(1-\lambda^2\right)-2\lambda\left(\lambda+1\right)}{1+\left(\lambda+1\right)^2}$$

$$=\frac{1-2\lambda-3\lambda^2}{1+\left(\lambda+1\right)^2}$$