1ère S1

Contrôle du mercredi 13 septembre 2017 (50 min)

Prénom : ………………………………. **Nom :** ………………………………. **Note : …. / 20**

I. (6 points : 2 points par réponse)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$ valeur absolue de $\left(1-2x^2\right)$.

Calculer les images par f de $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\dfrac{1}{3}$ et $1-\sqrt{2}$.

On attend les résultats sans valeur absolue.
On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera uniquement les résultats sous forme simplifiée.

$f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) =$ ………… $f\left(\dfrac{1}{3}\right) =$ ………… $f\left(1-\sqrt{2}\right) =$ …………

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Déterminer :

- l'ensemble E des réels dont la valeur absolue est strictement inférieure à 2 ;
- l'ensemble F des réels dont la valeur absolue est supérieure ou égale $\dfrac{4}{3}$.

Dans chaque cas, compléter l'égalité d'ensembles en utilisant les notations convenables.

$E =$ …………………………………………………………… $F =$ ……………………………………………………………

2°) Existe-t-il un réel dont la valeur absolue soit égale à $1-\sqrt{2}$?
Répondre par oui ou non sans faire de phrase puis sur les lignes en dessous donner le(s) réel(s) si la réponse est oui ou expliquer pourquoi par une phrase si la réponse est non.

…………

……

……

……

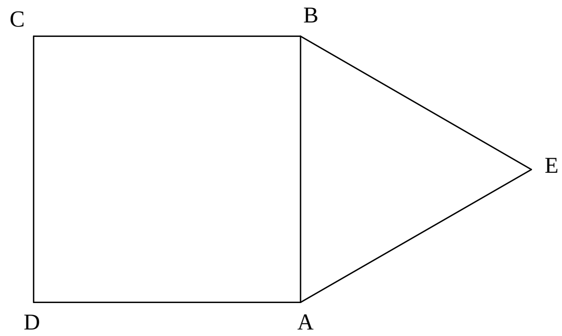
……

……

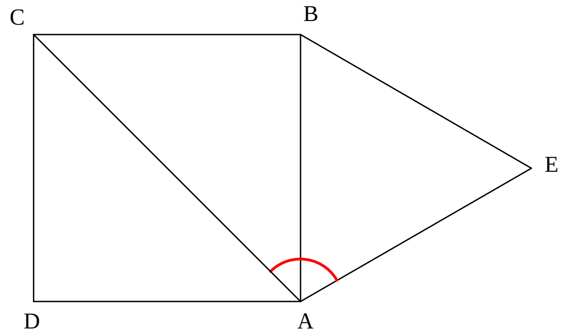
III. (3 points : 1 pour la première mesure et 2 points pour la deuxième mesure)

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré et ABE est un triangle équilatéral.
Calculer la mesure en radians des angles $\widehat{\text{CAE}}$ et $\widehat{\text{ADE}}$.

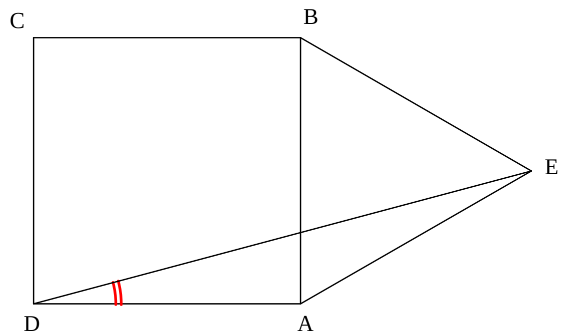
On donnera les valeurs exactes des résultats sous la forme $\dfrac{a\pi}{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls.



Ne rien écrire sur les figures.



$\widehat{\text{CAE}} =$ ………………



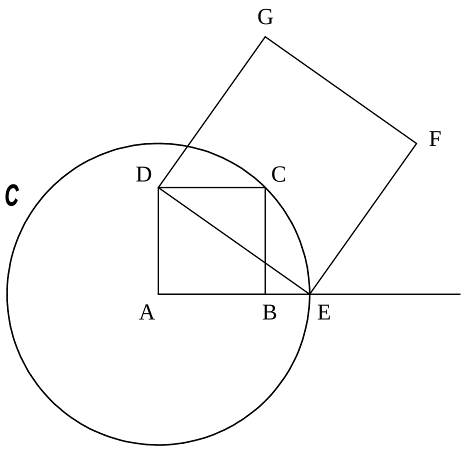
$\widehat{\text{ADE}} =$ ………………

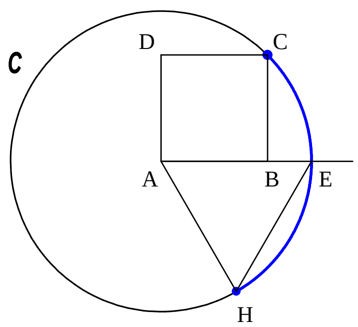
Une unité de longueur est fixée dans les exercices **IV** et **V**.

IV. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère les figures ci-dessous pour lesquelles on précise que :

• ABCD est un carré de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$;
• $\mathcal{C}$ est le cercle de centre de centre A et passant par C ;
• E est le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[\text{AB})$;
• DEFG est un carré (fig. 1) ;
• AEH est un triangle équilatéral (fig. 2).





Ne rien écrire sur les figures.

La figure 1 est valable pour les questions 1°) et 2°) ; la figure 2 est valable pour la question 3°).

1°) L'affirmation « L'aire de DEFG est le triple de celle de ABCD. » est-elle vraie ou fausse ?
Justifier la réponse. Voir remarque sur les notations à la fin du sujet.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

2°) Compléter l'égalité sans justifier l'égalité ci-dessous. On attend bien évidemment la valeur exacte.

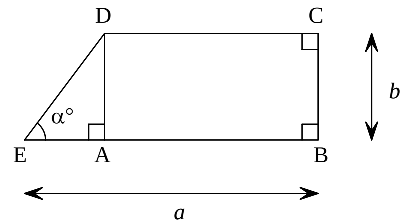
$$\cos \widehat{\text{AED}} =$$

3°) Sur la figure ci-dessous, le triangle AEH est équilatéral.
Exprimer la longueur L de l'arc $\overset{\frown}{\text{CH}}$ en fonction de a.

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la figure ci-dessous où ABCD est un rectangle et AED est un triangle rectangle en A.
On précise que a, b, α sont des réels strictement positifs.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Entourer parmi les expressions suivantes celle qui donne la longueur CD.

$a - b\cos\alpha°$ $\qquad$ $a - \dfrac{b}{\cos\alpha°}$ $\qquad$ $a - b\sin\alpha°$ $\qquad$ $a - \dfrac{b}{\sin\alpha°}$ $\qquad$ $a - b\tan\alpha°$ $\qquad$ $a - \dfrac{b}{\tan\alpha°}$

2°) Dans cette question, on suppose que $a = 5$, $b = 3$, $\alpha = 62$.

Déterminer la valeur arrondie au centième de CD.

La valeur arrondie au centième de CD est ………………….

Remarque pour la question 1°) de l'exercice IV.

• On notera $\mathcal{A}_{\text{ABCD}}$ et $\mathcal{A}_{\text{DEFG}}$ les aires respectives des carrés ABCD et DEFG. On rappelle que, dans cette notation, les noms des carrés doivent être écrits en indice, c'est-à-dire en lettres plus petites, en dessous de la ligne.

• On appliquera les formules d'aires en situations sans introduire de lettres autres que celles utilisées dans l'énoncé. On écrira par exemple : $\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = \text{AB}^2 = a^2$.

Corrigé du contrôle du 13-9-2017

I.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = $ valeur absolue de $\left(1-2x^2\right)$.

Calculer les images par f de $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{3}$ et $1-\sqrt{2}$.

On attend les résultats sans valeur absolue.
On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera uniquement les résultats sous forme simplifiée.

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}$ $\qquad$ $f\left(1-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}-5$

$$
\begin{aligned}
f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= \text{valeur absolue de } \left(1-2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right) \\
&= \text{valeur absolue de } \left(1-\frac{4}{3}\right) \\
&= \text{valeur absolue de } -\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{3}\right) &= \text{valeur absolue de } \left(1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \\
&= \text{valeur absolue de } \left(1-\frac{2}{9}\right) \\
&= \text{valeur absolue de } \frac{7}{9} \\
&= \frac{7}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(1-\sqrt{2}\right) &= \text{valeur absolue de } \left(1-2\left(1-\sqrt{2}\right)^2\right) \\
&= \text{valeur absolue de } \left(1-2\left(1-2\sqrt{2}+2\right)\right) \quad \text{(développement de l'identité remarquable)} \\
&= \text{valeur absolue de } \left(1-2\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) \\
&= \text{valeur absolue de } \left(1-6+4\sqrt{2}\right) \\
&= \text{valeur absolue de } \left(4\sqrt{2}-5\right) \\
&= 4\sqrt{2}-5 \text{ car } 4\sqrt{2}-5>0
\end{aligned}
$$

II.

1°) Déterminer :

- l'ensemble E des réels dont la valeur absolue est strictement inférieure à 2 ;
- l'ensemble F des réels dont la valeur absolue est supérieure ou égale $\frac{4}{3}$.

Dans chaque cas, compléter l'égalité d'ensembles en utilisant les notations convenables.

$E = \left]-2\,;2\right[$ $\qquad$ $F = \left]-\infty\,;-\frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$

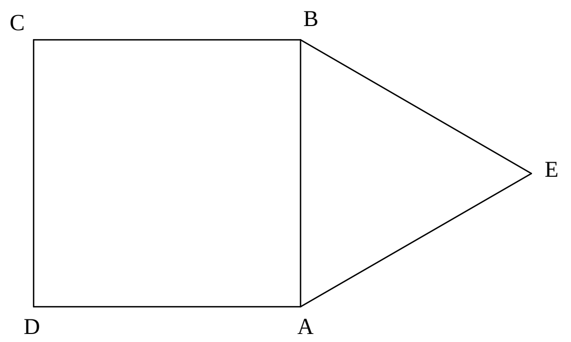
2°) Existe-t-il un réel dont la valeur absolue soit égale à $1-\sqrt{2}$?
Répondre par oui ou non sans faire de phrase puis sur les lignes en dessous donner le(s) réel(s) si la réponse est oui ou expliquer pourquoi par une phrase si la réponse est non.

non

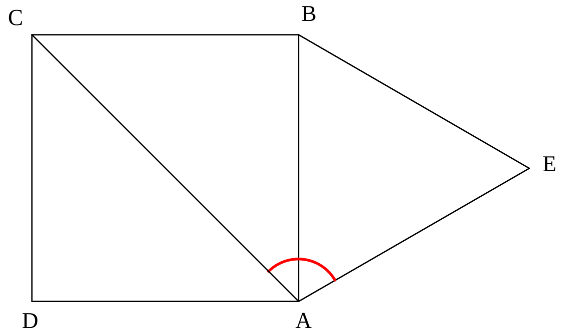
$1-\sqrt{2}<0$.
Or le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.
Donc il n'existe pas de réel dont la valeur absolue est égale à $1-\sqrt{2}$.

III.

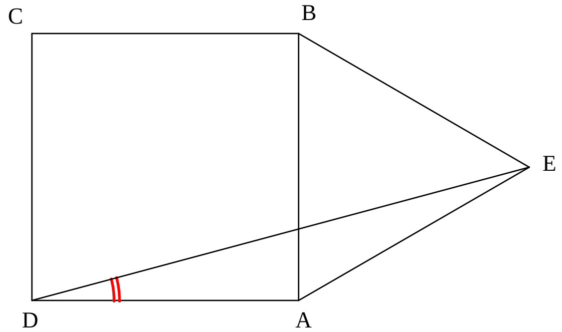
Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré et ABE est un triangle équilatéral.
Calculer la mesure en radians des angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{ADE}$.
On donnera les valeurs exactes des résultats sous la forme $\frac{a\pi}{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls.



Ne rien écrire sur les figures.



$$\widehat{CAE}=\frac{7\pi}{12}$$



$$\widehat{ADE}=\frac{\pi}{12}$$

On n'écrit pas $\widehat{ADE}=\frac{1\pi}{12}$.

On peut refaire les figures au brouillon en les codant.

$\widehat{CAE}=\widehat{CAB}+\widehat{BAE}$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$ (angle défini par la diagonale d'un carré et angles d'un triangle équilatéral)

$=\frac{7\pi}{12}$

On a $AD=AE$ donc le triangle ADE est isocèle en A.

Or $\widehat{DAE}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

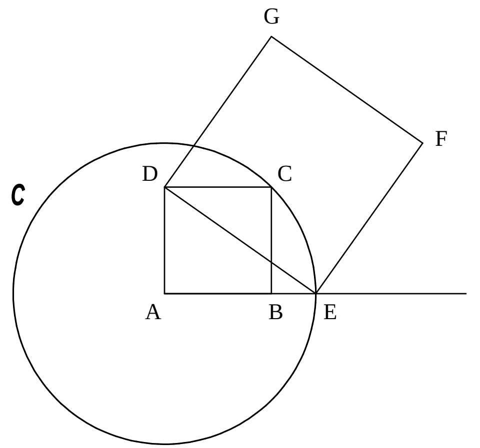
D'où $\widehat{ADE}=\dfrac{\pi-\frac{5\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{12}$.

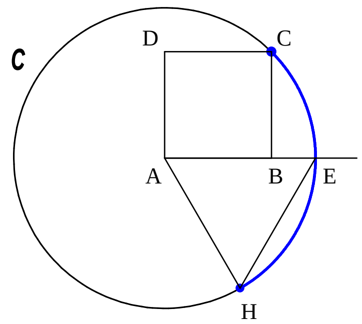
Une unité de longueur est fixée dans les exercices **IV** et **V**.

IV.

On considère les figures ci-dessous pour lesquelles on précise que :

- ABCD est un carré de côté a $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$;
- $\mathcal{C}$ est le cercle de centre de centre A et passant par C ;
- E est le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[AB)$;
- DEFG est un carré (fig. 1) ;
- AEH est un triangle équilatéral (fig. 2).





Ne rien écrire sur les figures.

La figure 1 est valable pour les questions 1°) et 2°) ; la figure 2 est valable pour la question 3°).

1°) L'affirmation « L'aire de DEFG est le triple de celle de ABCD. » est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse. Voir remarque sur les notations à la fin du sujet.

$\mathcal{A}_{ABCD}=AB^2=a^2$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADE rectangle en A, on a $DE^2=AE^2+AD^2$.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon $AC=a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté a).

Comme $E\in\mathcal{C}$, on a : $AE=a\sqrt{2}$.

Donc $DE^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2+a^2$ ce qui donne $DE^2=2a^2+a^2$ soit $DE^2=3a^2$.

Certains élèves ont trouvé des résultats pas du tout homogènes. Ils n'ont manifestement pas pensé à faire une analyse dimensionnelle.

On a donc $\mathcal{A}_{\text{DEFG}} = \text{DE}^2 = 3a^2$.

On en déduit que $\mathcal{A}_{\text{DEFG}} = 3\mathcal{A}_{\text{ABCD}}$.

L'affirmation est donc bien vraie.

2°) Compléter l'égalité sans justifier l'égalité ci-dessous. On attend bien évidemment la valeur exacte.

$$\cos\widehat{\text{AED}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

On travaille dans le triangle ADE rectangle en A.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{\text{AED}} &= \frac{\text{EA}}{\text{ED}}\\ &= \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} \text{ (on reprend les résultats des calculs de longueurs trouvés au 1°))}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{(propriété sur les racines carrées : } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\text{)}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $\cos\widehat{\text{AED}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ mais cette forme du résultat n'est pas forcément meilleure.

3°) Sur la figure ci-dessous, le triangle AEH est équilatéral.
Exprimer la longueur L de l'arc $\overset{\frown}{\text{CH}}$ en fonction de a.

$$L = \frac{7a\pi\sqrt{2}}{12}$$

On cherche la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{CAH}}$.

$$\widehat{\text{CAH}} = \widehat{\text{CAE}} + \widehat{\text{EAH}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

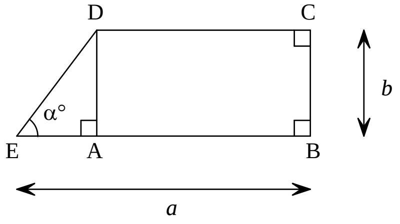
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon $a\sqrt{2}$.

L s'obtient en faisant le produit du rayon par la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{CAH}}$.

Remarque : $L = \frac{7a\pi\sqrt{2}}{2\times 6} = \frac{7a\pi}{6\sqrt{2}}$ (autre forme possible du résultat)

V.

On considère la figure ci-dessous où ABCD est un rectangle et AED est un triangle rectangle en A.
On précise que a, b, α sont des réels strictement positifs.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Entourer parmi les expressions suivantes celle qui donne la longueur CD.

$a - b\cos\alpha°$ $\quad a - \frac{b}{\cos\alpha°}$ $\quad a - b\sin\alpha°$ $\quad a - \frac{b}{\sin\alpha°}$ $\quad a - b\tan\alpha°$ $\quad a - \frac{b}{\tan\alpha°}$

On travaille dans le triangle ADE rectangle en A.

$\tan\alpha° = \frac{\text{AD}}{\text{AE}}$ d'où $\text{AE}\times\tan\alpha° = b$ donc $\text{AE} = \frac{b}{\tan\alpha°}$.

Comme ABCD est un rectangle, $\text{CD} = \text{AB}$.

Or $\text{AB} = \text{EB} - \text{EA}$ (car $\text{B} \in [\text{EA}]$) ce qui donne $\text{AB} = a - \frac{b}{\tan\alpha°}$.

On en déduit que $\text{CD} = a - \frac{b}{\tan\alpha°}$.

2°) Dans cette question, on suppose que $a = 5$, $b = 3$, $\alpha = 62$.

Déterminer la valeur arrondie au centième de CD.

La valeur arrondie au centième de CD est 3,40.

Le résultat du 1°) permet d'écrire $\text{CD} = 5 - \frac{3}{\tan 62°}$.

On utilise la calculatrice mise en mode « degré ».

On obtient l'affichage : 3,404871705.

On peut donc écrire $3,40487170...$ et par conséquent, la valeur arrondie au centième de CD est 3,40.

Remarque pour la question 1°) de l’exercice IV.

• On notera $\mathcal{A}_{\text{ABCD}}$ et $\mathcal{A}_{\text{DEFG}}$ les aires respectives des carrés ABCD et DEFG. On rappelle que, dans cette notation, les noms des carrés doivent être écrits en indice, c’est-à-dire en lettres plus petites, en dessous de la ligne.

• On appliquera les formules d’aires en situations sans introduire de lettres autres que celles utilisées dans l’énoncé. On écrira par exemple : $\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = \text{AB}^2 = a^2$.