

Les formats de papier

Mots-clefs : racines carrées, format d'un rectangle, valeur exacte, valeur approchée, aire

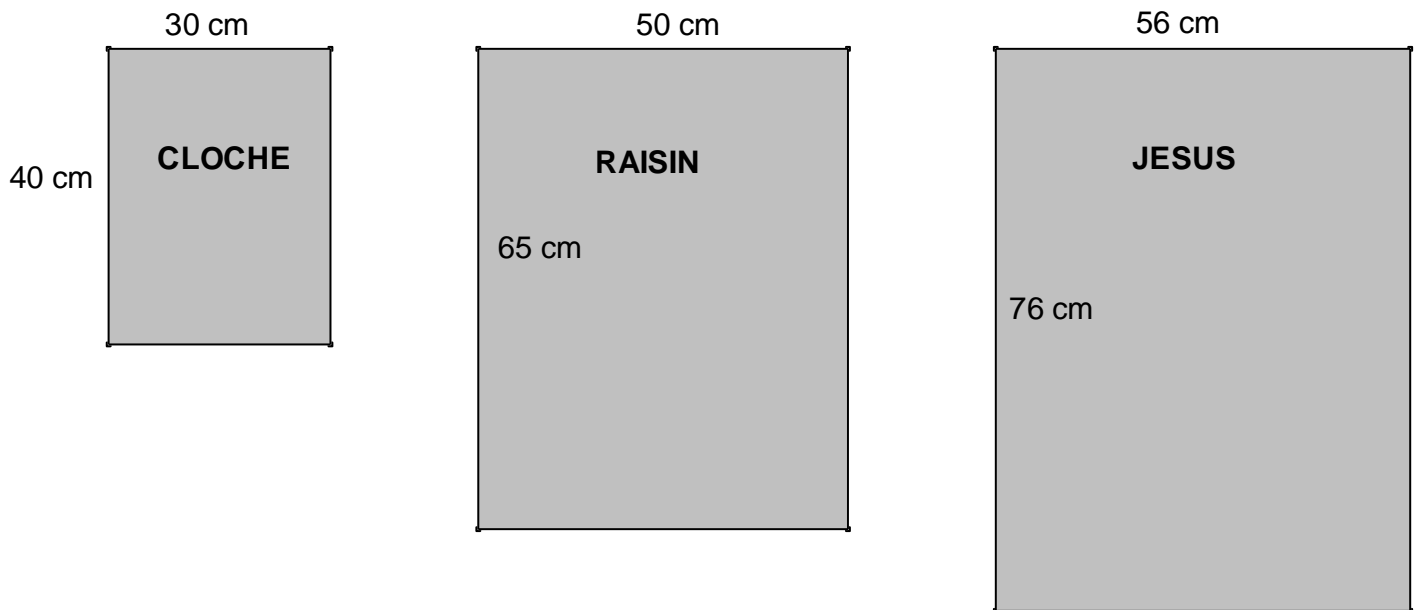
Deux rectangles ont-ils toujours la même forme ?

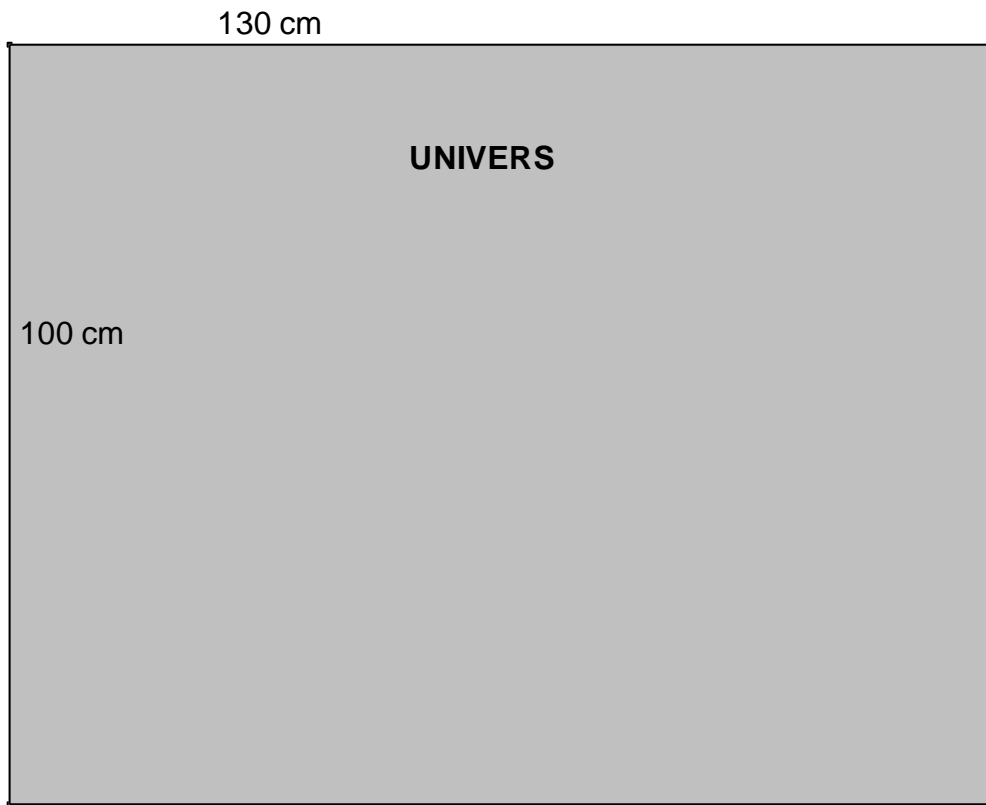
Définition :

On appelle **format** d'un rectangle de longueur L et de largeur l (dimensions exprimées dans la même unité) le rapport $f = \frac{L}{l}$.

Quelques formats anciens de papier aux noms poétiques

Ces noms viennent des filigranes qui étaient introduits dans le papier lors de sa fabrication.





Une feuille de papier est généralement destinée à être pliée (voire coupée) en 2, 4, 8, 16 pour donner les pages d'un même livre ou journal.

Si on plie ou en coupe en deux parties égales chacune de ces feuilles (suivant la longueur), les demi feuilles obtenues ont-elles la même forme que les feuilles initiales ?

Cloche : $\frac{L}{l} = \frac{40\text{cm}}{30\text{cm}} = \frac{4}{3} \approx 1,33$ demi feuille : $\frac{L'}{l'} = \frac{30\text{cm}}{20\text{cm}} = \frac{3}{2} = 1,5$ La forme cloche n'est pas conservée.

Raisin : $\frac{L}{l} = \frac{65\text{cm}}{50\text{cm}} = 1,3$ demi feuille : $\frac{L'}{l'} = \frac{50\text{cm}}{32,5\text{cm}} \approx 1,54$ La forme raisin n'est pas conservée.

La feuille de dimensions L' et l' est au format demi-raisin.
Ces formats raisin et demi raisin sont très utilisés en dessin.

Jésus : $\frac{L}{l} = \frac{76\text{cm}}{56\text{cm}} \approx 1,36$ demi feuille : $\frac{L'}{l'} = \frac{56\text{cm}}{38\text{cm}} \approx 1,47$ La forme jésus n'est pas conservée.

Univers : $\frac{L}{l} = \frac{130\text{cm}}{100\text{cm}} = 1,3$ demi feuille : $\frac{L'}{l'} = \frac{100\text{cm}}{65\text{cm}} \approx 1,54$ La forme univers n'est pas conservée.

Les formats A

On considère un rectangle de longueur L et de largeur l .

On envisage deux types de pliages.

1^{er} cas : Un pliage tel que la ligne de pliage soit parallèle à la longueur donnera deux rectangles dont le format sera le double du format du rectangle initial (calcul immédiat).

2^e cas : Un pliage tel que la ligne de pliage soit parallèle à la largeur donnera deux rectangles dont le format est

$$\frac{l}{L} = \frac{2l}{L}.$$

Pour que le format soit conservé, il faut et il suffit que l'on ait la relation $\frac{2l}{L} = \frac{L}{l}$ qui donne immédiatement

$$\left(\frac{L}{l}\right)^2 = 2 \text{ soit } \frac{L}{l} = \sqrt{2}.$$

On en déduit que le format d'un tel rectangle doit être égal à $\sqrt{2}$.

On considère un rectangle de format $\sqrt{2}$ et d'aire 1 m^2 .

On note l et L respectivement sa largeur et sa longueur en mètres.

Déterminons l et L .

$$L = l\sqrt{2} \text{ et } l \times L = 1 \text{ donc } \frac{L}{\sqrt{2}} \times L = 1 \text{ d'où } L^2 = \sqrt{2} \text{ ce qui donne } L = \sqrt{\sqrt{2}} \text{ puisque } L > 0.$$

$$\text{On obtient immédiatement } l = \frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Grâce à la calculatrice, on obtient respectivement pour valeurs décimales approchées de L et l : 1,1892 et 0,8409.

Le rectangle que nous venons de déterminer définit le format A0.

Les dimensions d'une feuille de papier A0 sont environ de 118,92 cm et 84,09 cm.

Remarque :

$$\text{On a : } \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2 = 2.$$

$\sqrt{\sqrt{2}}$ est l'unique réel positif qui élevé à la puissance 4 donne 2. On dit que c'est la racine quatrième de 2.

On la note $\sqrt[4]{2}$.

Ainsi, un rectangle de format A0 a pour longueur $\sqrt[4]{2}$ m et pour largeur $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m.

En pliant une feuille de format A0 de sorte que la ligne de pliage soit parallèle à la largeur, on obtient deux rectangles de format A1. La longueur vaut $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m et la largeur $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ m.

De même, une feuille de format A1 donne deux feuilles de format A2.

Une feuille de format A2 donne deux feuilles de format A3.

Une feuille de format A3 donne deux feuilles de format A4.

Une feuille de format A4 a pour largeur $\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}$ m et pour longueur $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ m.

Son aire est de $\frac{1}{16}$ m²

Avec une calculatrice, on retrouve les dimensions approchées bien connues d'une feuille de papier de format A4 à savoir 21 cm pour la largeur et 29,7 cm pour la longueur.

Plions en deux la feuille de papier format A3. Nous obtenons deux demi feuilles de format A4.
De même plions en deux la feuille de format A4. Nous obtenons deux demi feuilles de format A5.
Répétons le pliage. Nous obtenons des feuilles de format A6, A7 etc.

Format	A0	A1	A2	A3	A4	A5
Longueur en cm	118,92	84,09	59,46	42,05	29,73	21,03
Largeur en cm	84,09	59,46	42,05	29,73	21,03	14,87
$\frac{L}{l}$	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414

Nous retrouvons les dimensions bien connues du format A4 : 21 ; 29,7

Calculons l'aire de la feuille de format A0 :

$$118,92 \text{ cm} \times 84,09 \text{ cm} = 9999,9828 \text{ cm}^2 = 0,99999828 \text{ m}^2 \approx 1 \text{ m}^2.$$

La feuille de format A0 a une aire de 1 m².

Le format du papier est conservé. $\frac{L}{l} \approx 1,414$

À chaque fois que nous plions en deux la feuille de papier, nous divisons par deux l'aire du nouveau rectangle.
Donc, en fait, c'est comme si les dimensions, elles, étaient divisées par $\sqrt{2}$.

Rappel : $\sqrt{2} \approx 1,414$

Ces formats de papier A0, A1, A2, etc. font partie de la norme ISO 216.

ISO signifie International Standardization Organization.

Les formats A2 et A3 ont été introduits par une loi, une première fois, en France, pendant la Révolution (1792) afin d'établir des registres de cadastre au moindre coût. Cette loi, vite oubliée, n'a pas été appliquée à l'époque. C'est en 1922, en Allemagne que réapparaissent ces formats sous la norme DIN (Deutsches Institut für Normung) puis c'est en 1967 qu'ils seront réintroduits en France.

Il existe deux autres formats de papier, les formats B et C qui utilisent aussi le rapport $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.

Pour aller plus loin :

Format A et autres... : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/format.htm

Voir article Wikipedia