

Calcul du reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 9

Exemple :

On cherche à calculer « à la main » le reste de la division euclidienne de 251456260809 par 9 sans poser la division.

On pose $N = 251456260809$. Pour la lecture, il est préférable d'écrire $N = 251\ 456\ 260\ 809$.

On écrit la somme des chiffres de N :

$$2+5+1+4+5+6+2+6+0+8+0+9.$$

Dans cette somme, on barre les 0 et les 9.

$$2+5+1+4+5+6+2+6+\cancel{0}+8+\cancel{0}+\cancel{9}$$

$$2+5+1+4+5+6+2+6+8$$

On associe les chiffres dont la somme fait 9.

$$2+5+1+4+5+6+2+6+8.$$

On réécrit la somme en enlevant ces termes.

$$6+6.$$

Cette dernière somme est égale à 12.

On ajoute 1 et 2.

$$1+2=3$$

Le reste de la division euclidienne de N par 9 est égal à 3.

Justification :

On a raisonné modulo 9 et utilisé la propriété : « Tout entier naturel est congru à la somme de ses chiffres modulo 9 ».

Pour trouver le reste d'une division euclidienne par 9, il suffit de remplacer le nombre à diviser par la somme de ses chiffres et de diviser cette somme par 9. On peut quasiment trouver le reste de tête.

La méthode fonctionne aussi pour la division euclidienne par 3.

Méthode plus rapide :

On ajoute les chiffres successifs de gauche à droite.

Quand on tombe sur 9, on remplace par 0.

Si le résultat donne un nombre à deux chiffres, on ajoute ces deux chiffres.

$$N = 251456260809$$

$$2+5=7 ; 7+1=8, 8+4=12 \rightarrow 1+2=3, 3+5=8, 8+6=14 \rightarrow 1+4=5, 5+2=7, 7+6=13 \rightarrow 1+3=4, 4+8=12 \rightarrow 1+2=3$$

On ne compte pas les 0 et le 9.

Le reste de la division euclidienne de N par 9 est égal à 3.

Exercice :

Déterminer à la main le reste de la division euclidienne de 785486 par 9.

Solution :

Le reste de la division euclidienne de 785486 par 9 est le même que celui de $7+8+5+4+8+6$ par 9, donc de 38 par 9, donc aussi de $3+8$ par 9, donc de 11 par 9, donc de $1+1=2$ par 9, c'est donc 2.

Variante : On additionne les chiffres deux par deux de gauche à droite.

Entraînement personnel :

Sur son site « Mathématiques magiques », Thérèse Éveilleau propose d'entrer un entier naturel dont l'écriture en base 10 comporte 30 chiffres au maximum.

On effectue dans sa tête le calcul et l'on vérifie le résultat.

Adresse de la page sur la page « Les clés de détection d'erreur » :

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/cles.htm