Résumé sur les lois à densité

I. Généralités sur les lois de probabilité à densité sur un intervalle [*a* ; *b*]

• Définition

Lorsque *f* est définie, continue, positive ou nulle sur un intervalle [*a* ; *b*] telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, on dit que *f* est une **densité de probabilité** sur [*a* ; *b*].

On définit ainsi une **loi de probabilité continue** sur [*a* ; *b*].

• Probabilité d'un intervalle

Pour $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, $P([\alpha ; \beta]) = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$.

• Espérance et variance d'une variable aléatoire X dont la loi de probabilité a pour densité *f*

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \int_a^b \left(t - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2$$

II. Lois de probabilités à densité usuelles

➤ Loi uniforme sur [*a* ; *b*]

• Densité

$f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ sur [*a* ; *b*]

• Probabilité d'un intervalle

Pour $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, $P([\alpha ; \beta]) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$

• Espérance et variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi unforme sur [*a* ; *b*]

$$E(\mathrm{X}) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(\mathrm{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

• Cas particulier : loi uniforme sur [0 ; 1]

$P([\alpha ; \beta]) = \beta - \alpha$ (avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$)

➤ Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

• Densité

$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ sur $[0\,;+\infty[$

• Probabilités d'intervalles

Pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$:

$$P([\alpha\,;\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_{\alpha}^{\beta} = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda\beta}$$

$$P([\alpha\,;+\infty[) = 1 - P([0\,;\alpha]) = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha}$$

• Espérance et variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ

$$E(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda^2}$$

• Calculatrice

Il n'y a pas de touche de calculatrice pour cette loi.

On peut éventuellement faire un programme de calcul sur la calculatrice.

• Propriété de durée de vie sans vieillissement

Soit a et h deux réels positifs ou nuls quelconques.
On a : $P(\mathrm{X} \geqslant a + h \,/\, \mathrm{X} \geqslant a) = P(\mathrm{X} \geqslant h)$.

➤ Lois normales

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$

• Densité

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

• Probabilités d'intervalles

Pour tout intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$, on a : $P([a\,;b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

$$P([0\,;+\infty[) = P(]-\infty\,;0]) = \frac{1}{2}$$

• Espérance et variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$

$$E(\mathrm{X}) = 0$$

$$V(\mathrm{X}) = 1$$

• Propriétés

$\forall u \in \mathbb{R} \quad P(\mathrm{X} \leqslant -u) = P(\mathrm{X} \geqslant u) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant u)$

$\forall u > 0 \quad P(-u \leqslant \mathrm{X} \leqslant u) = 2P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant u) = 2P(\mathrm{X} \leqslant u) - 1$

$\forall \alpha \in]0\,;1[\quad \exists! u \in \mathbb{R}$ tel que $P(\mathrm{X} \leqslant u) = \alpha$

$\forall \alpha \in]0\,;1[\quad \exists! u_\alpha > 0$ **tel que** $P(-u_\alpha \leqslant \mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

$u_{0,05} \approx 1{,}96$ et $u_{0,01} \approx 2{,}58$

• Calculatrice TI

Pour calculer $P(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b)$ $\rightarrow$ normalFRép(a ; b ; 0 ;1)

Pour déterminer le réel u tel que $P(\mathrm{X} \leqslant u) = x \rightarrow$ FracNormale(x,0,1)

Lois normales dans le cas général **N**$(\mu\ ;\ \sigma^2)$ (avec $\sigma>0$)

• Densité

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad \text{sur } \mathbb{R}$$

• Lien avec la loi normale centrée réduite

La variable aléatoire X suit la loi normale N$(\mu\ ;\ \sigma^2)$ si et seulement si la variable $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi N (0 ; 1).

• Espérance et variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi N$(\mu\ ;\ \sigma^2)$

$E(X)=\mu$

$V(X)=\sigma^2$ (donc $\sigma(X)=\sigma$)

• Propriété

$\forall\alpha\in\left]0\,;1\right[\quad \exists!u\in\mathbb{R}$ **tel que** $P(X\leqslant u)=\alpha$

• Plages de normalité

$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0{,}68$ **(à 10^{-2} près)**
$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$ **(à 10^{-2} près)**
$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0{,}99$ **(à 10^{-2} près)**

• Calculatrice TI

Pour calculer $P(a\leqslant X\leqslant b)$ $\rightarrow$ normalFRép(a ; b ; μ ; σ)
Pour déterminer le réel u tel que $P(X\leqslant u)=x$ $\rightarrow$ FracNormale(x ; μ ; σ)

• Approximation de la loi binomiale

X suit la loi binomiale **B**(n ; p) avec $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{R}$ tel que avec $0\leqslant p\leqslant 1$.

$\forall k\in\{0\,;1\,;\ldots;n\}\quad P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

Si X suit la loi binomiale **B** (n ; p) avec $0<p<1$, alors la variable centrée réduite associée à X est $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Théorème de Moivre Laplace

On suppose que pour tout entier naturel n, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale B(n ; p) avec $p\in\left]0\,;1\right[$.

On pose $Z_n=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable centrée réduite associée à X_n.

Alors pour tout couple (a ; b) de réels tels que $a<b$ on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(a\leqslant Z_n\leqslant b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$.