Équations diophantiennes linéaires à deux inconnues

Résolution dans le cas général

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux.
On cherche tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que $ax+by=1$ (E).

1ère étape :
On cherche une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ de (E).
On sait qu'il en existe une d'après le théorème de Bezout.

Remarque :
En pratique, lorsque l'on connaît les valeurs de a et b, on utilise la calculatrice (« on transforme en fonction »).
Il peut arriver cependant que l'on trouve une solution « évidente » comme dans l'exemple $4x-3y=1$ (solution évidente : $(1;1)$).

2e étape :
Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers relatifs solution de (E) c'est-à-dire tels que $ax+by=1$.
On sait que $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de (E) donc $ax_0+by_0=1$.
Par conséquent, on a : $ax+by=ax_0+by_0$ (1).
$(1) \Leftrightarrow a(x-x_0)=b(y_0-y)$ $(1')$
D'après $(1')$, $b\,|\,a(x-x_0)$.
Or a et b sont premiers entre eux par hypothèse.
Donc d'après le théorème de Gauss $b\,|\,x-x_0$.
Il existe donc un entier relatif k tel que $x-x_0=kb$.
On reprend alors $(1')$ en remplaçant $x-x_0$ par kb.
On obtient $ak\cancel{b}=\cancel{b}(y_0-y)$ soit $y_0-y=ka$.
D'où $y=y_0-ka$.
On a démontré que si $(x\,;\,y)$ est un couple d'entier relatifs solution de (E), alors il existe un entier relatif k tel que $x=x_0+kb$ et $y=y_0-ka$.

3e étape :
Soit $(x\,;\,y)$ un couple tel que $x=x_0+kb$ et $y=y_0-ka$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Vérifions que $(x\,;\,y)$ est solution de (E).

$$\begin{aligned} ax+by &= a(x_0+kb)+b(y_0-ka) \\ &= ax_0+kab+by_0-kab \\ &= ax_0+by_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $(x\,;\,y)$ est solution de (E).

Conclusion :

Les solutions de (E) sont les couples de la forme $(ax_0 + kb\,;\, y_0 - ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.