

I. On dit que trois entiers naturels a, b, c forment un triplet pythagoricien si l'on a : $a^2 + b^2 = c^2$. Par exemple, (4, 3, 5) est un triplet pythagoricien.

1°) Soit p et q deux entiers naturels tels que $p > q$. On considère les nombres a, b, c définis par $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $c = p^2 + q^2$.

a) Dans cette question, on étudie les deux cas particuliers suivants :

1^{er} cas : $p = 3$ et $q = 2$

2^e cas : $p = 8$ et $q = 5$

Dans chaque cas, calculer les nombres a, b, c correspondants et vérifier qu'ils forment un triplet pythagoricien.

b) On revient au cas général où p et q sont deux entiers naturels tels que $p > q$.

Démontrer que le triplet (a, b, c) correspondant est un triplet pythagoricien.

Attention : on n'a pas le droit de se servir du a).

2°) **Applications**

a) Déterminer deux entiers naturels x et y tels que (646, x, y) soit un triplet pythagoricien.

b) Déterminer deux entiers naturels z et t tels que ($z, t, 41$) soit un triplet pythagoricien.

II.

1°) Soit x, y, z, t quatre réels donnés. Démontrer l'égalité suivante appelée identité de Lagrange* :

$$(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz + yt)^2 + (yz - xt)^2.$$

2°) **Applications**

a) En observant que $533 = 13 \times 41$, déterminer deux entiers naturels a et b tels que $a^2 + b^2 = 533$.

b) En observant que $1105 = 65 \times 17$, déterminer deux entiers naturels c et d tels que $c^2 + d^2 = 1105$. En observant que $1105 = 13 \times 85$ également, déterminer deux autres entiers naturels e et f tels que $e^2 + f^2 = 1105$.

III.

1°) Soit x un nombre réel donné. Démontrer l'égalité : $x^2 + (x+1)^2 + (x^2 + x)^2 = (x^2 + x + 1)^2$.

2°) **Application**

En observant que $91 = 81 + 10$, déterminer trois entiers naturels a, b, c tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 91^2$.

*Lagrange : mathématicien du XVIII^e siècle

2^e Devoir samedi 16-11-1996