TS

Présenter le résultat d'une ou plusieurs mesures

I. Généralités

1°) Écriture d'un résultat

Exemple : Une personne monte sur une balance pour se peser et lit :

$$\underbrace{m}_{\text{grandeur}} = \underbrace{53,6}_{\text{valeur}}\ \underbrace{\text{kg}}_{\text{unité}}$$

En notation scientifique, ce résultat s'écrit : $m = 5,36.10^1$ kg (1 chiffre devant la virgule).

2°) Chiffres significatifs

Ce sont les chiffres « certains » et le premier chiffre « incertain ».
Ici, 5 et 3 sont « certains » ; 6 est « incertain ». Donc ici il y a 3 chiffres significatifs.

Si on écrit $m = 0,536 \cdot 10^2$ kg, il y a encore 3 chiffres significatifs.

Si on écrit $m = 53,60$ kg, il y a ici 4 chiffres significatifs : le 0 est le 1^er^ chiffre incertain.

3°) Incertitude de la mesure : Δm

Il y a deux cas possibles.

1^er^ cas : Le résultat provient d'une **mesure simple** (ici la personne monte sur le pèse-personne).

- L'appareil est gradué tous les 100 g ; l'incertitude (notée Δm) sur cette mesure est égale à la moitié de la plus petite graduation, c'est-à-dire 50 g.
Le résultat de la mesure s'écrira alors sous la forme $m = 53,6 \pm \Delta m$ soit $m = 53,6 \pm 0,05$ kg (dans le dernier cas).

- L'appareil affiche un résultat numérique. L'incertitude sera alors égale au plus petit écart possible entre deux valeurs mesurées, soit ici 100 g.
Le résultat de la mesure s'écrira alors sous la forme $m = 53,6 \pm \Delta m$ soit $m = 53,6 \pm 0,1$ kg (dans le dernier cas).

2^e^ cas : Le résultat provient de **plusieurs mesures** successives notées m_1, m_2, …, m_N (exemple : chaque binôme de la classe effectue la même mesure sur le même objet).

- On calcule la moyenne notée $\overline{m}$ des différentes mesures, en enlevant celles-ci qui sont manifestement erronées (ou aberrantes). On parle de « moyenne élaguée ».

$$\boxed{\overline{m} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} m_i}{N}}$$

- Pour traduire les écarts entre la série de mesures et la valeur moyenne, on calcule l'écart-type, noté σ. Ceci représente la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} \left(m_i - \overline{m}\right)^2}{N}}}$$

On démontre que $\sigma = \sqrt{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{i=N} m_i^{\,2}\right)}{N} - \left(\overline{m}\right)^2}$ (formule de Koenig-Huygens).

En pratique, nous utiliserons les listes de la calculatrice et les commandes statistiques pour effectuer le calcul de la moyenne et de l'écart-type.

- On convient que l'incertitude sur la mesure est égale au double de l'écart-type : $\Delta m = 2\sigma$.

Le résultat final de la mesure s'écrira alors : $m = \overline{m} \pm 2\sigma$.

> Attention, ce type d'égalité avec le signe $\pm$ ne s'emploie pas en mathématiques.

> Cette dernière formule sera expliquée plus tard dans le chapitre de probabilités sur la loi normale.
> Nous verrons en effet qu'il arrive fréquemment que des mesures de grandeurs dans un échantillon statistique suivent fréquemment une distribution normale ou gaussienne correspondant à une « courbe en cloche ».
> Nous démontrerons alors qu'environ 95 % des valeurs appartiennent à l'intervalle $\left[\overline{m} - 2\sigma\,;\,\overline{m} + 2\sigma\right]$.

4°) Précision de la mesure (ou erreur relative)

a) La précision de la mesure est le rapport $\dfrac{\Delta m}{m}$.
Elle s'exprime en général en pourcentage. Plus ce résultat est faible, plus la mesure est précise.

b) On peut calculer l'écart relatif si on veut comparer une valeur expérimentale à une valeur théorique :

$$r = \frac{\left| m_{\text{exp}} - m_{\text{théorique}} \right|}{m_{\text{théorique}}}$$

Ce résultat est donné en pourcentage.

En mathématiques, dans le cadre des valeurs approchées, on parle d'incertitude absolue et de taux d'incertitude.

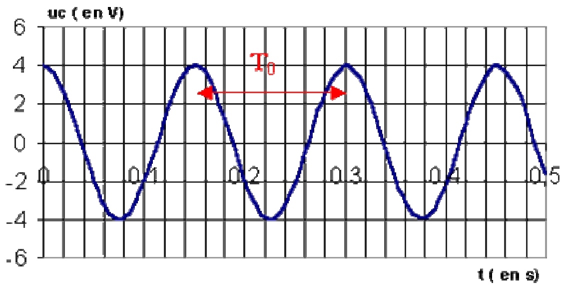
Lorsque $r < 5\,\%$, on considère que c'est normal.

Lorsque $r > 5\,\%$, on considère que c'est anormal.

II. Deux méthodes importantes

1°) La méthode d'échantillonnage

On cherche à déterminer la valeur de la période de ces oscillations enregistrées sur un ordinateur, avec le plus de précision possible. Pour cela, on mesure le plus grand nombre de périodes présentes sur l'enregistrement.



On compte 3 périodes au maximum soit $t = 0,45$ s.

Donc $T_0 = \dfrac{t}{3} = 0,15$ s.

Question : Avec quelle précision doit-on donner le résultat final ?

La lecture de la grandeur *t* se fait avec une incertitude qui correspond à $\dfrac{1}{2}$ graduation de l'échelle.

Chaque petite graduation correspond à 0,02 s soit $\Delta t = \dfrac{0,02}{2} = 0,01$ s.

On peut calculer la précision de la mesure : $\dfrac{\Delta T_0}{T_0} = \dfrac{\Delta t}{t} = \dfrac{0,01}{0,45} = 0,02 = 2\,\%$.

Donc T_0, comme *t*, est mesurée avec 2 % d'erreur.

$$\Delta T_0 = T_0 \times \frac{\Delta t}{t} = 0,15 \times \frac{0,01}{0,45} = 0,003 \text{ s}$$

On donnera donc le résultat $T_0 = 0,150 \pm 0,003$ s.

Supposons que la mesure de T_0 se fasse sur une période.

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{0,01}{0,15} = 0,07 = 7\,\% \ !$$

2°) La méthode de la moyenne

Au cours d'une séance de TP sur un titrage en chimie, les 9 groupes d'élèves relèvent les volumes équivalents versés pour titrer une solution d'acide chlorhydrique inconnue.
Ils dressent le tableau suivant :

Groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$V_{éq}$ (mL)	10,1	9,8	5,9	10,2	10,1	9,8	10,1	9,9	10,2

a) Tout d'abord, on remarque une valeur « bizarre » dans le tableau. Elle ne correspond pas à l'ensemble des autres valeurs. On la retire donc des valeurs à traiter. Le groupe N°3 doit donc refaire son titrage qui, visiblement, est erroné.

b) Il nous reste 8 valeurs dont on peut faire une moyenne. On parle de « moyenne élaguée ».

$$\overline{V}_{éq} = \frac{10,1+9,8+10,2+10,1+9,8+10,1+9,9+10,2}{8} = 10,025 \text{ mL}$$

c) Calcul de l'écart-type σ.

$$\sigma = 0,156 \text{ mL}$$

On peut utiliser les commandes statistiques de la calculatrice pour obtenir le résultat.

d) $\Delta \overline{V}_{éq} = 2\sigma = 0,312 \text{ mL} \approx 0,3 \text{ mL}$

e) On écrira le résultat : $V_{éq} = \overline{V_{éq}} \pm \Delta V_{éq}$ soit $V_{éq} = 10,00 \pm 0,3$ mL.

C'est-à-dire que le volume cherché est compris entre les valeurs 9,7 et 10,3 mL.

f) Précision de la mesure : $\dfrac{\Delta V_{éq}}{V_{éq}} = \dfrac{0,3}{10,0} = 3\,\%$.
Le volume est déterminé avec 3 % d'erreur.

Exercice

Calcul du coefficient de raideur d'un ressort

On reprend le tableau de valeurs vu lors du TP0. Un élève mesure avec une règle la longueur d'un ressort auquel est accroché des masses variables.

On précise que la longueur du ressort « à vide » est $\ell_0 = 15,3$ cm et l'on rappelle que $g = 9,81\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

On a vu en TP que la force constante de raideur du ressort était le rapport entre la valeur de F et l'allongement du ressort $\Delta\ell$.

$$k = \frac{F}{\Delta\ell}$$

On note $\vec{F}$ la tension du ressort.

m (g)	40	80	120	160	200
F (N)					
ℓ (cm)	20,4	25,3	30,3	35,7	40,4
$\Delta\ell$ (cm)	5,1	10,0	15,0	20,4	25,1
$k\ (\mathrm{N \cdot m^{-1}}) = \frac{F}{\Delta\ell}$					

On a vu en TP que la constante de raideur du ressort est le rapport entre la valeur de F et l'allongement du ressort $\Delta\ell$.

$$k = \frac{F}{\Delta\ell}$$

Deux remarques importantes :

• On rappelle que l'unité de masse du système SI est le kg.
Il faudra donc bien penser à convertir m en kilogrammes avant de calculer F.

• On rappelle que l'unité de longueur du système SI est le mètre. Il faudra donc bien penser à convertir $\Delta\ell$ en mètres avant d'effectuer le quotient $\frac{F}{\Delta\ell}$.

1°) Quelle est l'incertitude sur la mesure de ℓ (donc de $\Delta\ell$), sachant que la mesure a été faite avec une règle graduée ?

2°) Avec combien de chiffres peut-on donner le résultat numérique de la ligne de F ?

Remplir alors la ligne en respectant le nombre de chiffres significatifs.

3°) Sachant que la précision d'un résultat ne peut pas être meilleure que la précision la moins bonne des valeurs intervenant dans le calcul, avec combien de chiffres significatifs peut-on donner le résultat de k ?

4°) Calcul de k : valeur moyenne : $\overline{k} = \ldots..$

écart-type : $\sigma = \ldots..$

incertitude : $\Delta k =$

résultat : $k = \overline{k} \pm \ldots\ldots\ldots\ldots$

Soit $k = \ldots\ldots.. \pm \ldots\ldots..\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ ou $\ldots\ldots\ldots..\ \mathrm{N \cdot m^{-1}} < k < \ldots\ldots\ldots..\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$

Corrigé

On note $\vec{F}$ la tension du ressort.

m (g)	40	80	120	160	200
$F\ (N)$	$3,92\times10^2$	$7,85\times10^2$	$1,18\times10^3$	$1,57\times10^3$	$1,96\times10^3$
ℓ (cm)	20,4	25,3	30,3	35,7	40,4
$\Delta\ell$ (cm)	5,1	10,0	15,0	20,4	25,1
$k\ (N\cdot m^{-1}) = \dfrac{F}{\Delta\ell}$	$7,7\times10^1$	$7,85\times10^1$	$7,87\times10^1$	$7,70\times10^1$	$7,81\times10^1$

On a vu en TP que la constante de raideur du ressort était le rapport entre la valeur de F et l'allongement du ressort $\Delta\ell$.

$$k = \frac{F}{\Delta\ell}$$

Deux remarques importantes :

• On rappelle que l'unité de masse du système SI est le kg.
Il faudra donc bien penser à convertir m en kilogrammes avant de calculer F.

• On rappelle que l'unité de longueur du système SI est le mètre. Il faudra donc bien penser à convertir $\Delta\ell$ en mètres avant d'effectuer le quotient $\dfrac{F}{\Delta\ell}$.

1°) Quelle est l'incertitude sur la mesure de ℓ (donc de $\Delta\ell$), sachant que la mesure a été faite avec une règle graduée ?

0,05 cm (une demi-graduation)

2°) Avec combien de chiffres peut-on donner le résultat numérique de la ligne de F ?

3 chiffres car les masses sont des masses marquées donc très précises et g est donné avec 3 chiffres significatifs.

Remplir alors la ligne en respectant le nombre de chiffres significatifs.

3°) Sachant que la précision d'un résultat ne peut pas être meilleure que la précision la moins bonne des valeurs intervenant dans le calcul, avec combien de chiffres significatifs peut-on donner le résultat de k ?

4°) Calcul de k : valeur moyenne : $\overline{k} = 78$

écart-type : $\sigma = 0,73 = 1\ \text{N.m}^{-1}$

incertitude : $\Delta k = 2\sigma = 2\ \text{N.m}^{-1}$

résultat : $k = \overline{k} \pm 2\sigma$ soit $k = 78 \pm 2\ N\cdot m^{-1}$ ou $76\ N\cdot m^{-1} < k < 80\ N\cdot m^{-1}$