TS1 et TS3 spé

Devoir pour le lundi 14 novembre 2016

Avant de commencer, on commencera par lire les rappels donnés en annexe sur la factorielle d'un entier naturel.
On veillera au soin et l'on pensera notamment à tirer les traits de fraction à la règle.

Partie A : Étude de cas particuliers

Dans cette partie, on donnera les résultats sans détailler la démarche.
Proposer dans ce cas toutes les solutions possibles (sans tenir compte de l'ordre) pour les questions 1°) et 2°) et si possible pour la question 3°).

1°) Écrire 3 ! comme somme de trois diviseurs positifs deux à deux distincts de 3 !.

2°) Écrire 4 ! comme somme de quatre diviseurs positifs deux à deux distincts de 4 !.

3°) Écrire 5 ! comme somme de cinq diviseurs positifs deux à deux distincts de 5 !.

Le but de la suite du problème est de démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, le nombre n ! peut s'écrire sous la forme d'une somme de n diviseurs positifs deux à deux distincts de n !.

Partie B : Une formule sommatoire utile pour la suite

1°) Vérifier que pour tout entier naturel k, on a : $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!} \quad (1)$.

2°) Le but de cette question est de déterminer une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{k}{(k+1)!}$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On remplace k dans l'égalité (1) successivement par tous les entiers naturels de 1 à $n-1$ et l'on écrit les égalités obtenues les unes en dessous des autres comme dans le cadre ci-dessous (au brouillon, on pourra écrire plus d'égalités pour bien comprendre ce qui se passe) :

$$\frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$
$$\frac{2}{(1+2)!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

On effectue ensuite la somme membre à membre de toutes ces égalités. On barre ensuite en « diagonale » les termes qui s'annulent deux à deux comme dans le cadre ci-dessous :

$$\frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}}$$
$$\frac{2}{(1+2)!} = \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{n-1}{n!} = \cancel{\frac{1}{(n-1)!}} - \frac{1}{n!}$$

La méthode employée ici est appelée « méthode de télescopage » ou « méthode de simplification en cascade ».

Lire et comprendre la démarche effectuée puis recopier le cadre ci-dessus (il ne doit pas y avoir de page à tourner en veillant à bien écrire les signes d'égalités les uns en dessous des autres) et en déduire une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{k}{(k+1)!}$.

Partie C : Démonstration du résultat

Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on pose $u_k = \dfrac{(k+1)!}{k}$.

On observera que l'on a $u_k = 1 \times 2 \times \ldots \times (k-1) \times (k+1)$ pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, ce que l'on peut aussi exprimer en disant que u_k est le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et $k+1$, sauf k (on peut aussi écrire $u_k = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k+1 \\ i \neq k}} i$). Ainsi, u_k est un entier naturel pour tout entier naturel $k \geqslant 1$.

1°) Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.
Justifier brièvement que, pour tout entier naturel $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, u_k est un diviseur positif de n !.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $u_{k+1} - u_k = k! \times \alpha_k$ où α_k est une expression qui dépend de k que l'on écrira sous la forme d'un seul quotient.
En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

3°) À partir de la formule simplifiée de la somme obtenue dans la question 2°) de la partie B, écrire une égalité de la forme $1 = \ldots.$ en utilisant les u_k.

4°) Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 3.
Justifier que $u_{n-1} < n!$ et déduire des questions précédentes que le nombre n ! peut s'écrire sous la forme d'une somme de n diviseurs positifs deux à deux distincts de n !.

Factorielle d'un entier naturel

Définition et notation :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on appelle **« factorielle de *n* »** le produit de tous les entiers naturels de 1 à *n*.

On note ce nombre $n!$.

On a donc : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Par convention, on pose également : $0! = 1$ et $1! = 1$.

Exemple :

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

La factorielle de 5 est égale à 120.

Propriété :

Pour tout entier naturel *k*, on a : $k! \times (k+1) = (k+1)!$.

La démonstration cette propriété est très facile.

Corrigé du DM pour le 14-11-2016

Partie A : Étude de cas particuliers

Dans cette partie, on donnera les résultats sans détailler la démarche.
Proposer dans ce cas toutes les solutions possibles (sans tenir compte de l'ordre) pour les questions 1°) et 2°) et si possible pour la question 3°).

Il n'y a pas de méthode particulière pour cette partie, à part chercher.

1°) Écrire 3 ! comme somme de trois diviseurs positifs deux à deux distincts de 3 !.

On a : $3! = 6$.

$3\,! = 3+2+1$

Remarque :

Si l'on n'exige pas que les diviseurs sont deux à deux distincts il y a d'autres possibilités :
$3! = 2+2+2$ et $3! = 1+1+4$.

Il y a une seule possibilité d'écriture.

2°) Écrire 4 ! comme somme de quatre diviseurs positifs deux à deux distincts de 4 !.

On a : $4! = 24$.

Les diviseurs positifs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Il y a deux possibilités d'écriture.

$4! = 12+8+3+1$

$4! = 12+6+4+2$

3°) Écrire 5 ! comme somme de cinq diviseurs positifs deux à deux distincts de 5 !.

On a : $5! = 120$.

Les diviseurs positifs de 120 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 30 ; 40 ; 60 ; 120.

Il y a 14 façons d'écrire 5 ! comme somme de cinq diviseurs positifs deux à deux distincts.

$5! = 60+40+10+8+2$

$5! = 60+40+12+5+3$

$5! = 60+40+15+2+3$

$5! = 60+30+24+4+2$

$5! = 60+30+24+5+1$

$5! = 60+30+20+8+2$

$5! = 60+30+20+6+4$

$5! = 60+30+15+12+3$

$5! = 60+30+15+10+5$

$5! = 60+30+12+10+8$

$5! = 60+24+20+15+1$

$5! = 60+24+20+12+4$

$5! = 60+24+20+10+6$

$5! = 40+30+24+20+6$

On pourrait utiliser un programme sur calculatrice pour déterminer toutes ces décompositions.

Le but de la suite du problème est de démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, le nombre n ! peut s'écrire sous la forme d'une somme de n diviseurs positifs deux à deux distincts de n !.

Partie B : Une formule sommatoire utile pour la suite

1°) Vérifier que pour tout entier naturel k, on a : $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$ (1).

1ère méthode :

$$\begin{aligned}\frac{k}{(k+1)!} &= \frac{(k+1)-k}{(k+1)!}\\ &= \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\\ &= \frac{\cancel{(k+1)}\times 1}{\cancel{(k+1)}\times k!} - \frac{1}{(k+1)!}\\ &= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\end{aligned}$$

2e méthode :

On part du membre de droite.

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}&=\frac{1\times(k+1)}{k!\times(k+1)}-\frac{1}{(k+1)!}\\&=\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\\&=\frac{k+1-1}{(k+1)!}\\&=\frac{1}{(k+1)!}\end{aligned}$$

2°) Le but de cette question est de déterminer une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{k}{(k+1)!}$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On remplace k dans l'égalité (1) successivement par tous les entiers naturels de 1 à $n-1$ et l'on écrit les égalités obtenues les unes en dessous des autres comme dans le cadre ci-dessous (au brouillon, on pourra écrire plus d'égalités pour bien comprendre ce qui se passe) :

$$\frac{1}{(1+1)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}$$
$$\frac{2}{(1+2)!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

……

$$\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$$

On effectue ensuite la somme membre à membre de toutes ces égalités. On barre ensuite en « diagonale » les termes qui s'annulent deux à deux comme dans le cadre ci-dessous :

$$\frac{1}{(1+1)!}=\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}$$
$$\frac{2}{(1+2)!}=\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}$$

……

$$\frac{n-1}{n!}=\cancel{\frac{1}{(n-1)!}}-\frac{1}{n!}$$

La méthode employée ici est appelée « méthode de télescopage » ou « méthode de simplification en cascade ».

Lire et comprendre la démarche effectuée puis recopier le cadre ci-dessus (il ne doit pas y avoir de page à tourner en veillant à bien écrire les signes d'égalités les uns en dessous des autres) et en déduire une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{k}{(k+1)!}$.

Par simplification en cascade, on obtient : $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{n!}$ soit $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{n!}$.

Partie C : Démonstration du résultat

Pour tout entier naturel $k\geqslant 1$, on pose $u_k=\frac{(k+1)!}{k}$.

On observera que l'on a $u_k=1\times 2\times\ldots\times(k-1)\times(k+1)$ pour tout entier naturel $k\geqslant 1$ ce que l'on peut aussi exprimer en disant que u_k est le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et $k+1$, sauf k (on peut aussi écrire $u_k=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant k+1\\ i\neq k}} i$). Ainsi, u_k est un entier naturel pour tout entier naturel $k\geqslant 1$.

1°) Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.
Justifier brièvement que, pour tout entier naturel $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, u_k est un diviseur positif de n !.

1ère méthode :

Par définition, $n!$ est le produit de tous les entiers naturels de 1 à n.

Soit k un entier naturel appartenant à $\{1,\ldots,n-1\}$.
Par définition, $u_k=1\times 2\times\ldots\times(k-1)\times(k+1)$.
Comme $k\leqslant n-1$, tous les facteurs du produit qui définit u_k sont des facteurs qui apparaissent dans le produit qui définit $n!$.
On peut donc dire que u_k divise n !.
De plus, $u_k>0$ car u_k est le produit de réels strictement positifs.

On en déduit que, pour tout entier naturel $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, u_k est un diviseur positif de n !.

2e méthode :

On utilise le symbole $\prod$. C'est un peu plus compliqué dans l'écriture et pas forcément plus clair.

$n!=\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant k+1\\ i\neq k}} i\right)\times k\times\left(\prod_{k+1\leqslant i\leqslant n} i\right)$ soit $n!=u_k\times k\times\left(\prod_{k+1\leqslant i\leqslant n} i\right)$.

$k\times\left(\prod_{k+1\leqslant i\leqslant n} i\right)$ est un entier naturel.

On peut donc affirmer que u_k divise n !.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $k\geqslant 1$, $u_{k+1}-u_k=k!\times\alpha_k$ où α_k est une expression qui dépend de k que l'on écrira sous la forme d'un seul quotient.

$$\begin{aligned}u_{k+1}-u_k&=\frac{(k+2)!}{k+1}-\frac{(k+1)!}{k}\\&=\frac{k!\times\cancel{(k+1)}(k+2)}{\cancel{k+1}}-\frac{k!\times(k+1)}{k}\\&=k!\times(k+2)-\frac{k!\times(k+1)}{k}\\&=k!\times\left(k+2-\frac{k+1}{k}\right)\\&=k!\times\frac{k^2+k-1}{k}\end{aligned}$$

Donc $u_{k+1}-u_k=k!\times\alpha_k$ avec $\alpha_k=\dfrac{k^2+k-1}{k}$.

En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On a : $k!>0$.
De plus, $k^2>0$ et $k-1\geqslant 0$ donc $k^2+k-1>0$ d'où $\alpha_k>0$.

On en déduit que $u_{k+1}-u_k>0$.

On en déduit que $\forall k\in\mathbb{N}^*\quad u_{k+1}-u_k>0$ soit $\forall k\in\mathbb{N}^*\quad u_{k+1}>u_k$.
Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

3°) À partir de la formule simplifiée de la somme obtenue dans la question 2°) de la partie B, écrire une égalité de la forme $1=\ldots.$ en utilisant les u_k.

On a démontré dans la question 2°) de la partie B : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{n!}$.

Or $u_k=\dfrac{(k+1)!}{k}$ donc $\dfrac{1}{u_k}=\dfrac{k}{(k+1)!}$.

L'égalité précédente peut donc s'écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{u_k}=1-\frac{1}{n!}$ ce qui donne immédiatement $\displaystyle 1=\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{u_k}+\frac{1}{n!}$.

Par multiplication des deux membres par n !, on obtient : $\displaystyle n!=1+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{n!}{u_k}$.

4°) Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 3.
Justifier que $u_{n-1}<n!$ et déduire des questions précédentes que le nombre n ! peut s'écrire sous la forme d'une somme de n diviseurs positifs deux à deux distincts de n !.

On a :

$$\begin{aligned}u_{n-1}&=\frac{(n-1+1)!}{n-1}\\&=\frac{n!}{n-1}\\&=n\end{aligned}$$

On a : $n<n!$ car $n\geqslant 3$

Donc $u_{n-1}<n!$.

Dans la question précédent, nous avons démontré que $\displaystyle n!=1+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{n!}{u_k}$ soit $\displaystyle n!=1+\underbrace{\frac{n!}{u_1}+\frac{n!}{u_2}+\ldots+\frac{n!}{u_{n-1}}}_{(n-1)\text{ termes}}$.

D'après la question 1°), u_1, u_2, …, u_{n-1} sont des diviseurs positifs de n !.
Par conséquent, $\dfrac{n!}{u_1}$, $\dfrac{n!}{u_2}$, …, $\dfrac{n!}{u_{n-1}}$ sont aussi des diviseurs positifs de n !.
En effet, pour $k\in\{1;\ldots;n-1\}$, $\dfrac{n!}{u_k}$ est le diviseur de $n!$ associé à u_k.

Il ne faut pas oublier que 1 est aussi un diviseur positif de n ! (car 1 divise tout entier).

Ainsi, on a démontré que n ! peut s'écrire sous la forme d'une somme de n diviseurs positifs de n !.

Il reste à démontrer que ces diviseurs sont deux à deux distincts.

Pour cela, on utilise le résultat de la question 2°) à savoir que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

On a donc $u_1<u_2<\ldots<u_{n-1}<n!$. Comme tous les termes sont positifs, on a : $\dfrac{1}{u_1}>\dfrac{1}{u_1}>\ldots>\dfrac{1}{u_{n-1}}>\dfrac{1}{n!}$.
Par multiplication de chacun des membres par n ! (qui est strictement positif), on obtient :
$\dfrac{n!}{u_1}>\dfrac{n!}{u_2}>\ldots>\dfrac{n!}{u_{n-1}}>1$.

Ainsi, $\dfrac{n!}{u_1}$, $\dfrac{n!}{u_2}$, …, $\dfrac{n!}{u_{n-1}}$ et 1 sont aussi des diviseurs positifs deux à deux distincts de n !.

Le résultat est donc démontré.

Application aux premières valeurs de n :

On a : $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 8$, $u_4 = 30$, $u_5 = 144$, $u_6 = 840$, $u_7 = 5760$, $u_8 = 45360$, $u_9 = 403200$, $u_{10} = 3991680$.

Pour $n = 3$, on a : $3! = 6$.
$\frac{3!}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{3!}{u_2} = \frac{6}{3} = 2$. On a bien $3! = 3 + 2 + 1$, écriture que nous avions obtenu à la question 1°) de la partie A.

Pour $n = 4$, on a $4! = 24$.
$\frac{4!}{u_1} = \frac{24}{2} = 12$, $\frac{4!}{u_2} = \frac{24}{3} = 8$, $\frac{4!}{u_3} = \frac{24}{8} = 3$.
On a bien $4! = 12 + 8 + 3 + 1$, écriture que nous avions obtenu à la question 2°) de la partie A.

Pour $n = 5$, on a $5! = 120$.
$\frac{5!}{u_1} = \frac{120}{2} = 60$, $\frac{5!}{u_2} = \frac{120}{3} = 40$, $\frac{5!}{u_3} = \frac{120}{8} = 15$, $\frac{5!}{u_4} = \frac{120}{30} = 4$.
On a bien $5! = 60 + 40 + 15 + 4 + 1$, écriture que nous avions obtenu à la question 2°) de la partie A.

Pour $n = 6$, on a : $6! = 720$ et en appliquant la même méthode, on obtient : $6! = 360 + 240 + 90 + 24 + 5 + 1$.

Pour $n = 7$, on a : $7! = 5040$ et en appliquant la même méthode, on obtient :
$7! = 2520 + 1680 + 630 + 168 + 35 + 6 + 1$.