TS1 et TS3 spé | **Devoir pour le lundi 19 septembre 2016**

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple recto-verso.

Les nombres parfaits

On appelle *nombre parfait* un entier naturel non nul qui est la somme de tous ses diviseurs positifs[1], sauf lui-même. Par exemple, les diviseurs positifs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28 ; or $1+2+4+7+14=28$ donc 28 est un nombre parfait.

1°) Trouver le nombre parfait inférieur à 20 (il y en a exactement un).

2°) Vérifier que 496 est un nombre parfait (c'est le troisième nombre parfait, après celui qu'on a trouvé à la question précédente, qui est le premier, et 28, qui est le deuxième). Pour trouver les diviseurs positifs de 496, il pourrait être utile de le décomposer en facteurs premiers ou d'utiliser le programme de la calculatrice.

3°) Dans le chapitre IX de ses *Éléments*, Euclide écrit :

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

a) Traduire le texte en français.

b) En fait, on donne la traduction française :

Si autant de nombres que l'on veut, en commençant par l'unité, sont obtenus avec une suite à double proportion jusqu'à ce que la somme de tous devienne un nombre premier, et si on forme un nombre en multipliant cette somme par le dernier nombre de cette somme, alors ce produit sera un nombre parfait.

Ce qu'Euclide appelle une suite « à double proportion », c'est une suite de nombres entiers où chaque terme est le double du précédent ; par exemple la suite 1, 2, 4. Il s'agit en fait d'une suite géométrique de raison 2.
Dans cet exemple, la somme de tous les termes vaut $1+2+4=7$, qui est un nombre premier. Le texte des *Éléments* nous apprend alors qu'en multipliant cette somme par son dernier terme le résultat est un nombre parfait. Ici, on obtient $7\times4=28$, qui est effectivement un nombre parfait, comme on l'a vérifié au début de ce problème.
En utilisant ce résultat, trouver le quatrième nombre parfait (on utilisera une suite « à double proportion » commençant par 1, 2, 4).

[1] Remarquer qu'on dira dans ce problème « diviseurs positifs » pour dire « diviseurs entiers naturels » ou « diviseurs strictement positifs » ou ce qui revient au même « diviseurs positifs ou nuls » puisque nous nous intéressons à un entier naturel non nul.

4°) **Somme des inverses des diviseurs positifs d'un nombre parfait**

a) En réduisant au même dénominateur tous ces termes, calculer la somme[2] $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$.

Le 2 en hauteur indique une note en bas de page et non un carré !

b) Vérifier que la somme est la même pour les trois autres nombres parfaits trouvés dans les questions précédentes.

c) Quelle conjecture peut-on faire sur la somme des inverses de tous les diviseurs positifs d'un nombre parfait ?

Remarque complémentaire : On peut montrer que la méthode donnée dans les *Éléments* d'Euclide permet de trouver tous les nombres parfaits pairs ; ceux-ci sont les nombres de la forme $2^{n-1}\times\left(2^n-1\right)$, ou *n* est un entier naturel tel que 2^n-1 soit premier. Les nombres premiers de la forme 2^n-1 sont appelés *nombres de Mersenne*, du mathématicien français Marin Mersenne (1588-1648), qui les a étudiés. On ne connaît pas, à ce jour, de nombres parfaits impairs, et on ne sait pas s'il en existe.

[2] Remarquer qu'on prend ici la somme de *tous* les diviseurs positifs du nombre 28, même lui-même, contrairement aux questions précédentes.

Corrigé du DM pour le 19-9-2016

On appelle *nombre parfait* un entier naturel non nul qui est la somme de tous ses diviseurs positifs[1], sauf lui-même. Par exemple, les diviseurs positifs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28 ; or $1+2+4+7+14=28$ donc 28 est un nombre parfait.

1°) Trouver le nombre parfait inférieur à 20 (il y en a exactement un).

$\boldsymbol{D}^{+}(6)=\{1\,;2\,;3\,;6\}$

$1+2+3=6$ donc 6 est un nombre parfait.

L'unique nombre parfait inférieur à 20 est 6.

2°) Vérifier que 496 est un nombre parfait (c'est le troisième nombre parfait, après celui qu'on a trouvé à la question précédente, qui est le premier, et 28, qui est le deuxième). Pour trouver les diviseurs positifs de 496, il pourrait être utile de le décomposer en facteurs premiers ou d'utiliser le programme de la calculatrice.

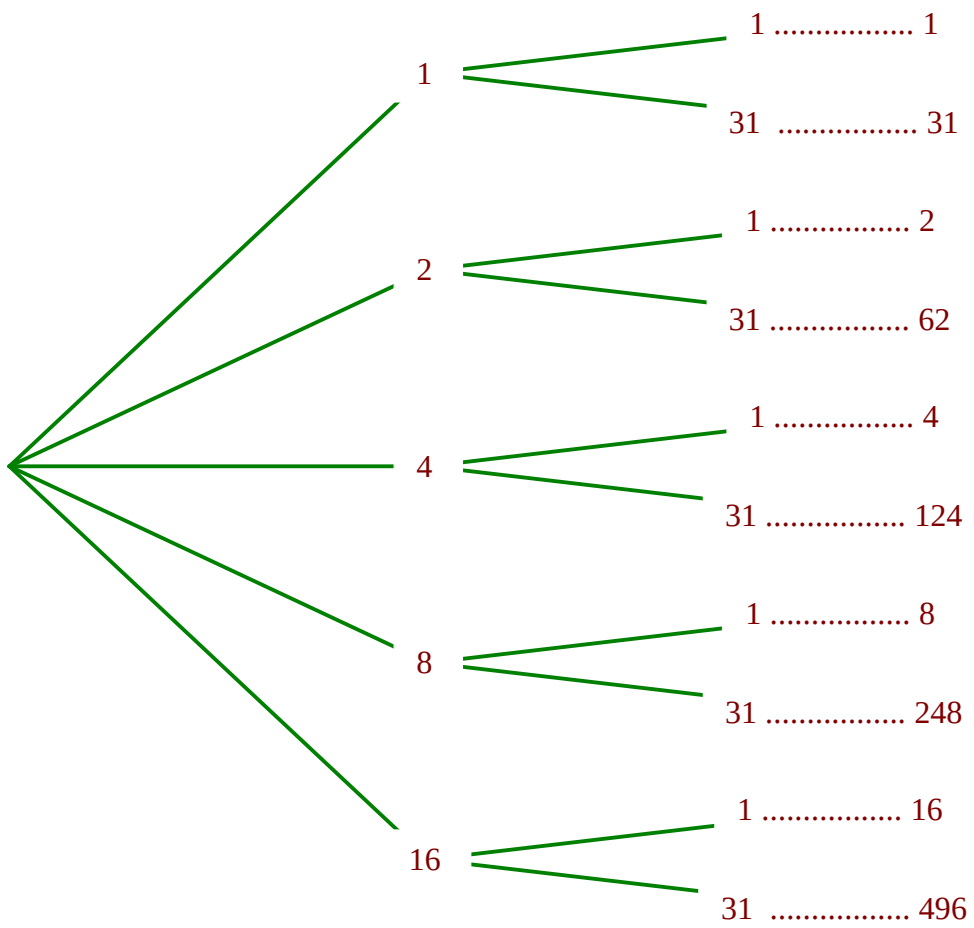
1ère méthode :

On cherche la décomposition de 496 en facteurs premiers :

$496=2\times 248$
$248=2\times 124$
$124=2\times 62$
$62=2\times 31$
$31=31\times 1$

Donc $496=2^4\times 31$.

496 a donc 10 diviseurs positifs que l'on obtient grâce à l'arbre ci-dessous.



$\boldsymbol{D}^{+}(496) = \{1\,;2\,;4\,;8\,;16\,;31\,;62\,;124\,;248\,;496\}$

2e méthode :

On utilise le programme de la calculatrice.

Vérifions que le nombre 496 est un nombre parfait.

$1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$

Donc 496 est un nombre parfait.

3°) Dans le chapitre IX de ses *Éléments*, Euclide écrit :

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

a) Traduire le texte en français.

b) En fait, on donne la traduction française :

Si autant de nombres que l'on veut, en commençant par l'unité, sont obtenus avec une suite à double proportion jusqu'à ce que la somme de tous devienne un nombre premier, et si on forme un nombre en multipliant cette somme par le dernier nombre de cette somme, alors ce produit sera un nombre parfait.

Ce qu'Euclide appelle une suite « à double proportion », c'est une suite de nombres entiers où chaque terme est le double du précédent ; par exemple la suite 1, 2, 4. Il s'agit en fait d'une suite géométrique de raison 2.
Dans cet exemple, la somme de tous les termes vaut $1+2+4=7$, qui est un nombre premier. Le texte des *Éléments* nous apprend alors qu'en multipliant cette somme par son dernier terme le résultat est un nombre parfait. Ici, on obtient $7\times 4=28$, qui est effectivement un nombre parfait, comme on l'a vérifié au début de ce problème.
En utilisant ce résultat, trouver le quatrième nombre parfait (on utilisera une suite « à double proportion » commençant par 1, 2, 4).

[1] Remarquer qu'on dira dans ce problème « diviseurs positifs » pour dire « diviseurs entiers naturels » ou « diviseurs strictement positifs » ou ce qui revient au même « diviseurs positifs ou nuls » puisque nous nous intéressons à un entier naturel non nul.

Déterminons le quatrième nombre parfait (avec la suite à double proportion).

$1+2+4+8+16+32+64=127$

127 est un nombre premier et $127\times 64=8128$.

Donc 8128 est un nombre parfait.

4°) **Somme des inverses des diviseurs positifs d'un nombre parfait**

a) En réduisant au même dénominateur tous ces termes, calculer la somme[2] $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$.
Le 2 en hauteur indique une note en bas de page et non un carré !

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}&=\frac{28}{28}+\frac{14}{28}+\frac{7}{28}+\frac{4}{28}+\frac{2}{28}+\frac{1}{28}\\&=\frac{56}{28}\\&=2\end{aligned}$$

b) Vérifier que la somme est la même pour les trois autres nombres parfaits trouvés dans les questions précédentes.

● Calculons la somme des inverses des diviseurs positifs du nombre parfait 6.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

● Calculons la somme des inverses des diviseurs positifs du nombre parfait 496.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=\frac{496}{496}+\frac{248}{496}+\frac{124}{496}+\frac{62}{496}+\frac{31}{496}+\frac{16}{496}+\frac{8}{496}+\frac{4}{496}+\frac{2}{496}+\frac{1}{496}$$

$$=\frac{992}{496}$$

$$=2$$

●Calculons la somme des inverses des diviseurs positifs du nombre parfait 8128.

$$\boldsymbol{D}^{+}(8128)=\{1;2;4;8;16;32;64;127;254;508;1016;2032;4064;8128\}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{127}+\frac{1}{254}+\frac{1}{508}+\frac{1}{1016}+\frac{1}{2032}+\frac{1}{4064}+\frac{1}{8128}=\frac{8128}{8128}+\frac{4064}{8128}+\frac{2032}{8128}+\frac{1016}{8128}+\frac{508}{8128}+\frac{254}{8128}+\frac{127}{8128}+\frac{64}{8128}+\frac{32}{8128}+\frac{16}{8128}+\frac{8}{8128}+\frac{4}{8128}+\frac{2}{8128}+\frac{1}{8128}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{127}+\frac{1}{254}+\frac{1}{508}+\frac{1}{1016}+\frac{1}{2032}+\frac{1}{4064}+\frac{1}{8128}=\frac{16252}{8128}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{127}+\frac{1}{254}+\frac{1}{508}+\frac{1}{1016}+\frac{1}{2032}+\frac{1}{4064}+\frac{1}{8128}=2$$

c) Quelle conjecture peut-on faire sur la somme des inverses de tous les diviseurs positifs d'un nombre parfait ?

On peut conjecturer que la somme des inverses de tous les diviseurs positifs d'un nombre parfait semble être égale à 2.

Ce résultat est assez facile à démontrer pour les nombres parfaits obtenus selon le principe donné dans les *Éléments* d'Euclide.

Remarque complémentaire : On peut montrer que la méthode donnée dans les *Éléments* d'Euclide permet de trouver tous les nombres parfaits pairs ; ceux-ci sont les nombres de la forme $2^{n-1}\times\left(2^{n}-1\right)$, ou *n* est un entier naturel tel que $2^{n}-1$ soit premier. Les nombres premiers de la forme $2^{n}-1$ sont appelés *nombres de Mersenne*, du mathématicien français Marin Mersenne (1588-1648), qui les a étudiés. On ne connaît pas, à ce jour, de nombres parfaits impairs, et on ne sait pas s'il en existe.

[2] Remarquer qu'on prend ici la somme de *tous* les diviseurs positifs du nombre 28, même lui-même, contrairement aux questions précédentes.