Exercices sur les séries

$\boxed{1}$ Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=n(u_n-u_{n+1})$.

1°) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On pose $U_N=\sum_{n=1}^{N}u_n$ et $V_N=\sum_{n=1}^{N}n(u_n-u_{n+1})$.

Démontrer que $V_N=U_N-Nu_{N+1}$.

2°) Démontrer que si la série $\left(\sum u_n\right)$ converge, alors la série $\left(\sum v_n\right)$ converge et que, dans ce cas, leurs sommes sont égales.

$\boxed{2}$ Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n=\dfrac{1}{2^p}$ si $n=2p$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $u_n=\dfrac{1}{2^{p+1}}$ si $n=2p+1$ avec $p\in\mathbb{N}$.

Démontrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 0}u_n\right)$ converge et calculer sa somme.

$\boxed{3}$ Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)$.

Démontrer que (P_n) converge vers une limite strictement positive.

$\boxed{4}$ Soit f une application injective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature de la série $\left(\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{f(n)}{n^2}\right)$.

Indication : Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ on ait :

$\sum_{k=n+1}^{2n}f(k)\geqslant an^2$.

$\boxed{5}$ Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=a^{\mathrm{E}(\ln n)}$ où a est un réel strictement positif fixé.

$\boxed{6}$ Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{E}\left(\sqrt{n+1}\right)-\mathrm{E}\left(\sqrt{n}\right)\right]$.

Démontrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 1}u_n\right)$ converge et calculer sa somme.

$\boxed{7}$ 1°) Étudier la convergence de la suite de terme général $p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

2°) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ à termes positifs telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \sum_{k=n+1}^{2n}u_k\leqslant\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$.

Démontrer que $\left(\sum u_n\right)$ converge.

Indication : Majorer $\sigma_p=\sum_{k=1}^{2^p}u_k$ pour $p\in\mathbb{N}^*$.

$\boxed{8}$ 1°) Déterminer un équivalent de $S_n=\sum_{k=2}^{n}\dfrac{\ln k}{k}$.

2°) Démontrer que $(\ln n)^2-(\ln(n-1))^2=2\dfrac{\ln n}{n}+\dfrac{\ln n}{n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

3°) En utilisant la suite de terme général $u_n=\dfrac{\ln n}{n}-\dfrac{1}{2}\left((\ln n)^2-(\ln(n-1))^2\right)$, démontrer qu'il existe un réel c tel que $S_n=\dfrac{(\ln n)^2}{2}+c+\mathrm{o}(1)$.

Solutions

$\boxed{1}$

2°)

On doit dire que la suite (u_n) est à termes positifs :

- la suite (u_n) est décroissante ;
- elle tend vers 0 puisque la série $\left(\sum u_n\right)$ converge.

On obtient alors aisément que $\forall N \in \mathbb{N}^* \quad V_N \leqslant U_N$.

Comme la série $\left(\sum u_n\right)$ converge, on en déduit que la suite (V_N) converge.

On pose alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = L$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = L'$.

On a alors $NU_{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell = L' - L$. Par suite, $nu_n \longrightarrow \ell$.

Si $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$ ce qui est impossible car la série $\left(\sum u_n\right)$ serait convergente.

Donc $\ell = 0$.

$\boxed{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2 + 1 = 3$.

$\boxed{4}$

Version originale de l'exercice :

Soit f une application injective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2}$.

Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

Déterminer la limite de (S_n).

Indication : On pourra considérer $S_{2n} - S_n$ puis démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geqslant an^2$ pour un réel a à préciser.

$\boxed{5}$ Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = a^{\mathrm{E}(\ln n)}$ où a est un réel strictement positif fixé.

$\ln n - 1 < \mathrm{E}(\ln n) \leqslant n$

1er cas : $a > 1$

$(\ln n - 1) \times \ln a < \ln a \times \mathrm{E}(\ln n) \leqslant \ln n \times \ln a$

$\mathrm{e}^{(\ln n - 1)\times \ln a} < \mathrm{e}^{\ln a \times \mathrm{E}(\ln n)} \leqslant \mathrm{e}^{\ln n \times \ln a}$

$e^{(\ln n - 1)\times \ln a} < e^{\ln a \times \mathrm{E}(\ln n)} \leqslant e^{\ln n \times \ln a}$

$\dfrac{n^{\ln a}}{a} < u_n \leqslant n^{\ln a}$

$\ln a > 0$ donc $n^{\ln a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

La série $\left(\sum u_n\right)$ diverge grossièrement.

2e cas : $a = 1$

Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1$ donc la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

3e cas : $0 < a < 1$

Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{n^{\ln a}}{a} > u_n \geqslant n^{\ln a}$ soit $\dfrac{1}{an^{-\ln a}} > u_n \geqslant \dfrac{1}{n^{-\ln a}}$.

La série $\left(\sum \dfrac{1}{n^{-\ln a}}\right)$ converge si et seulement si $-\ln a > 1$ c'est-à-dire $a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Bilan :

si $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, alors la série $\left(\sum u_n\right)$ converge.

Si $a \geqslant \dfrac{1}{e}$, alors la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

$\boxed{7}$

1°) Étudier la convergence de la suite de terme général $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

2°)

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On a :

$$\sum_{k=1}^{2^m} u_k = \sum_{k=1}^{2^{m-1}} u_k + \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^{m-1}} u_k$$

$$\sum_{k=1}^{2^m} u_k \leqslant \left(1+\frac{1}{2^{m-1}}\right)\sum_{k=1}^{2^{m-1}} u_k \quad \text{soit} \quad \sigma_m \leqslant \left(1+\frac{1}{2^{m-1}}\right)\sigma_{m-1}$$

$$\sigma_2 \leqslant \left(1+\frac{1}{2^1}\right)\sigma_1$$

$$\sigma_3 \leqslant \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\sigma_2$$

$$\sigma_n \leqslant \left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\sigma_{n-1}$$

Par multiplication membre à membre, et simplification (suite à termes positifs), on a : $\sigma_n \leqslant p_{n-1}\sigma_1 \leqslant L\times\sigma_1$.

La suite (σ_n) est croissante majorée donc elle converge.

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ est croissante et admet une suite extraite convergente. Donc elle converge elle aussi.