TS1

Contrôle du mercredi 4 mai 2016 (4 heures)

Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet (en particulier, ne rien marquer sur les graphiques).

Partie commune (3 heures)

Le barème est donné sur 40.

I. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

- Les questions sont indépendantes les unes des autres.
- Pour les questions 1°) à 4°), on donnera la réponse sans justifier. En revanche, pour la question 5°), une démonstration est attendue.
- Dans les questions 3°) à 5°), le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

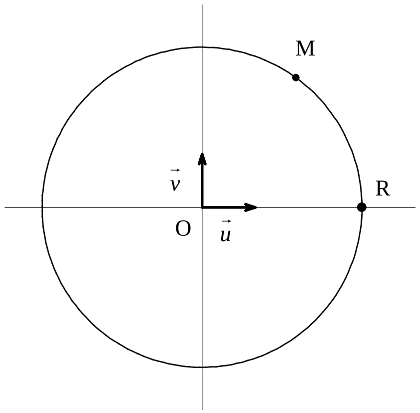
1°) Soit θ un réel fixé. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{1+\text{i}}{\text{e}^{\text{i}\theta}}$.

2°) Déterminer les nombres complexes *z* de module 1 tels que $\arg\left(z^2\right) = \arg\left(\bar{z}\right) \quad [2\pi]$.
On vérifiera que, parmi les nombres obtenus, l'un est réel. On écrira les autres sous forme exponentielle.

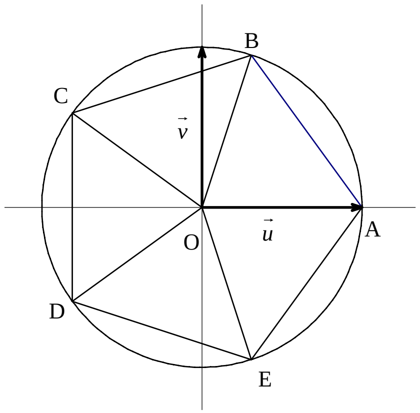
3°) Soit M un point quelconque de *P*, distinct de O, d'affixe *z*. On note R le point d'intersection du cercle de centre O passant par M et de la demi-droite fermée d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (voir graphique 1).
Exprimer l'affixe du point R en fonction de *z*.

4°) Soit ABCDE un pentagone régulier convexe direct inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 (voir graphique 2). Le point A a pour affixe 1.
Déterminer l'affixe du point B sous forme exponentielle.

5°) Soit M un point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\theta}$ $\left(\theta \in \mathbb{R}\right)$ et J le point d'affixe – 1.
Démontrer que $\text{JM}^2 = 2 + 2\cos\theta$.



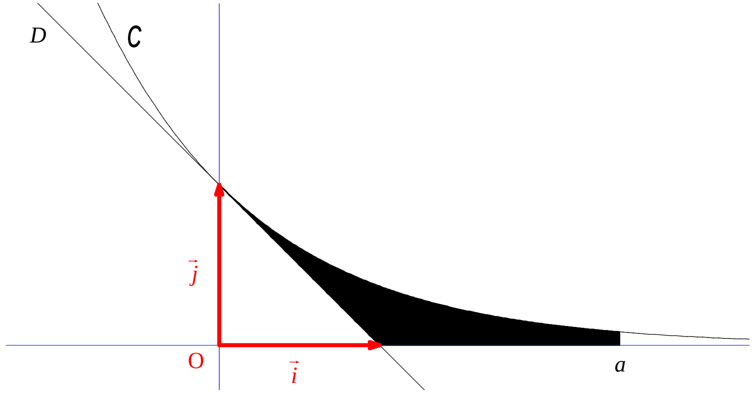
Graphique 1



Graphique 2

II. (4 points)

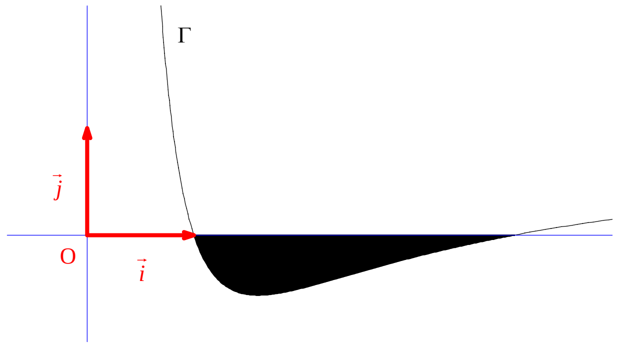
On considère la fonction $f : x \mapsto \text{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.



Soit *a* un réel strictement supérieur à 1.
Exprimer en fonction de *a* l'aire $\mathcal{A}(a)$, exprimée en unité d'aire, du domaine *D* limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, la droite *D* d'équation $y = 1 - x$ et la droite d'équation $x = a$.
On admettra que $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite *D*.

III. (4 points)

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$. On note Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré (domaine compris entre la courbe Γ et l'axe des abscisses). On donnera la valeur exacte.
Aucun détail des calculs n'est demandé.

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel x différent de 0 et de – 1, on a : $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

1°) Soit a un réel strictement positif.

Calculer $I(a) = \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} I(a)$.

V. (17 points)

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune. Le schéma ci-contre en fournit une perspective cavalière.
Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité de longueur est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $\mathrm{DD}' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.
Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.
Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie 1 (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

1°) Calculer $f'(x)$. Écrire une étape de calcul montrant les formules utilisées puis donner le résultat final.

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

On ne demande pas de détailler l'étude du signe de $f'(x)$.

3°) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4°) On admet que la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$g(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$ est donnée par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].
On donnera directement l'expression de F sans détailler la démarche.

Partie 2 (10 points : 1°) 4 points ; 2°) 4 points ; 3°) 2 points)

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1°) Justifier que les propositions suivantes sont vraies.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

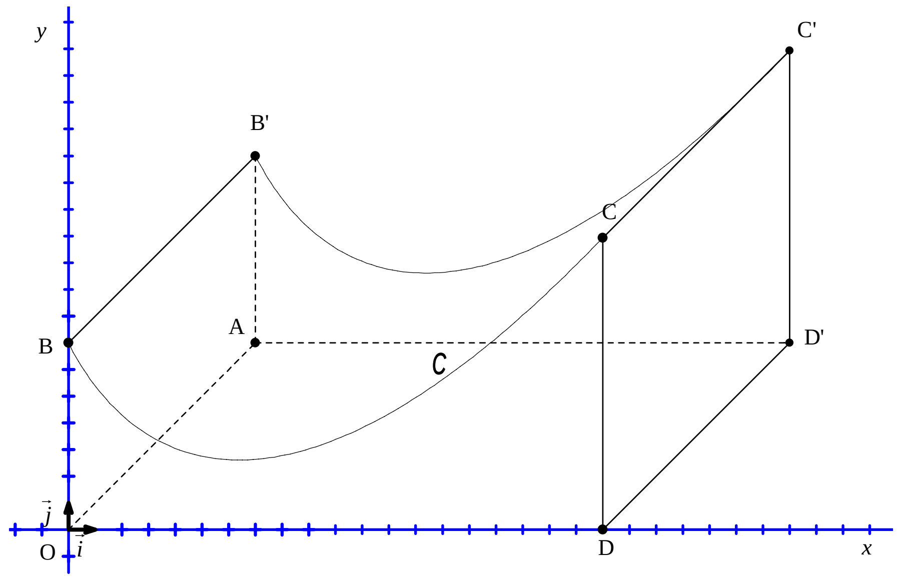
P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

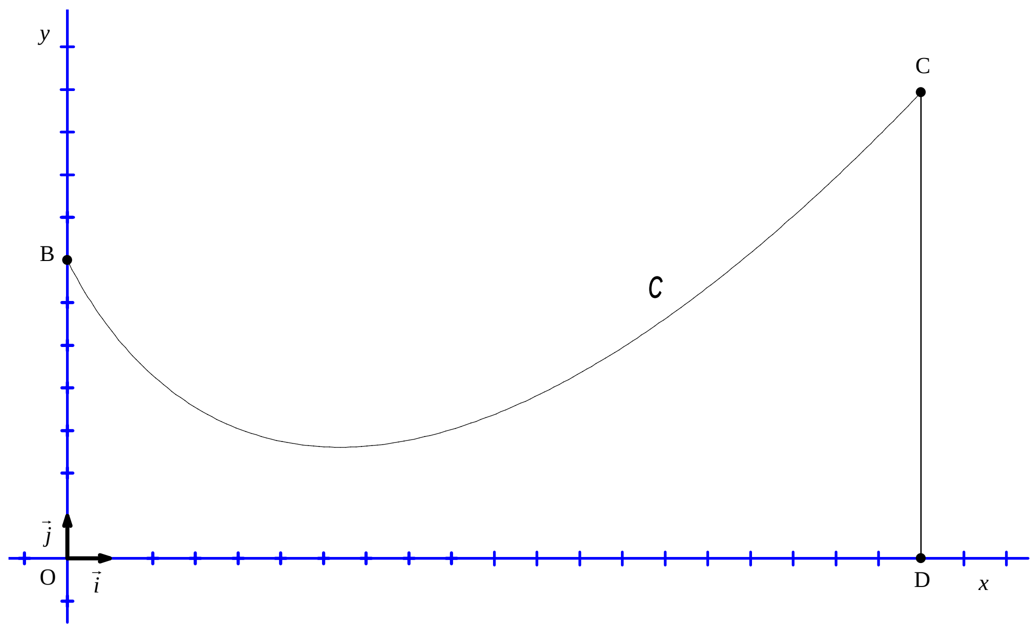
2°) On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
Déterminer la quantité de peinture nécessaire, en litres. On donnera la valeur décimale approchée à l'unité par excès.
Écrire le calcul effectué et donner le résultat demandé directement sans expliquer.

3°) On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

On admet que la longueur en mètres de l'arc $\widehat{\mathrm{BC}}$ est donné par $L = \int_0^{20} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au centième de l'aire de la partie roulante en m^2.





Prénom : ……………………………………..… **Nom :** ………………………………………………

Contrôle du mercredi 4 mai 2016
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	Total/40	Total/20

I. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

1°) ……………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) ……………………………………………………………………….. (résultats sans égalité)

3°) ……………………… (un seul résultat sans égalité)

4°) ……………………… (un seul résultat sans égalité)

5°) ………

………

………

………

………

………

………

………

II. (4 points)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points)

……………………………………………… (une seule égalité)

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

1°) ………

……

……

……

……

……

2°) ………

……

……

……

……

……

V. (17 points)

Partie 1 (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

1°) ………

2°)

3°) ………

……

……

4°) ………

Partie 2 (10 points : 1°) 4 points ; 2°) 4 points ; 3°) 2 points)

1°)

P_1 : ……

……

……

……

P_2 : ……

……

……

……

2°) ………………………………… (un seul résultat, sans égalité)

……

3°) ………………………………… (un seul résultat, sans égalité)

Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Le barème est donné sur 20.

Prénom : …………………………………..….   **Nom :** ………………………………………………

I. (12 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points + 1 point ; c) 2 points + 1 point + 1 point ; d) 1 point)

Une boîte contient 25 jetons : 3 jetons rouges, 4 jetons jaunes et 18 jetons bleus.
On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

• Lorsqu'on est en A : Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est jaune, le pion va en C. Si le jeton tiré est bleu, le pion reste en A.
• Lorsqu'on est en B : Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est jaune, le pion va en C. Si le jeton tiré est bleu, le pion reste en B.
• Lorsqu'on est en C : Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est jaune, le pion va en B. Si le jeton tiré est bleu, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A. Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On a : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1°) Donner sans explication la matrice T carrée d'ordre 3 telle que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = TX_n$.

2°) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$. On admet les deux résultats suivants :

① P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{37}{110} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$; ② $T = P^{-1}DP$.

a) Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n où n est un entier naturel quelconque.

b) On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première colonne de la matrice T^n. Ainsi $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & * & * \\ \beta_n & * & * \\ \gamma_n & * & * \end{pmatrix}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième colonne ni ceux de la troisième colonne.

On donne dans le désordre les expressions de α_n, β_n, γ_n :

$\dfrac{4 - 4 \times 0,56^n}{11}$; $\dfrac{3 + 7 \times 0,6^n}{10}$; $\dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

Associer chaque terme général α_n, β_n, γ_n à l'expression correspondante (aucun détail des calculs n'est demandé sur la copie).

……

En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n.

……

c) Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n). On ne détaillera que le calcul de la limite de (a_n) et on donnera les autres limites sans détailler.

……

……

……

……

……

……

d) Sur quel sommet a-t-on « le plus de chance » de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ? Répondre en justifiant par une phrase.

……

……

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Une entreprise commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et B. Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre :

• si, une semaine donnée, il fait ses achats auprès du fournisseur A, la probabilité qu'il fasse aussi ses achats auprès du fournisseur A la semaine suivante est égale à 0,95 ;

• si, une semaine donnée, il fait ses achats auprès du fournisseur B, la probabilité qu'il fasse aussi ses achats auprès du fournisseur B la semaine suivante est égale à 0,9.

On note $\mathcal{G}$ le graphe probabiliste à deux sommets correspondant à l'état 1 : « La commande est passée auprès du fournisseur A » et l'état 2 : « La commande est passée auprès du fournisseur B ».

1°) Donner sans explication la matrice de transition en colonnes M du graphe $\mathcal{G}$ en prenant les sommets dans l'ordre état 1-état 2.

2°) Déterminer l'état stable S de $\mathcal{G}$. On ne demande pas d'expliquer.

3°) Sachant que, la semaine 0, la probabilité qu'il fasse ses achats auprès de A est 0,4 et la probabilité qu'il fasse ses achats auprès de B est 0,6, déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur B.

On répondra par une phrase sans expliquer.

……

……

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Les sites Internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

• Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.

• Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.

• Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute.

Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera. Il se connecte à l'instant $t = 0$ sur le site C et commence sa navigation.

1°) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?

………………… (un seul résultat sans explication)

2°) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

Donner le résultat puis écrire sur une ligne le calcul effectué pour trouver le résultat.

………………… (un seul résultat sans explication)

……

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Le barème est donné sur 20.

Prénom : …………………………………..… **Nom :** ………………………………………………

I. (7 points : 1°) 4 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Déterminer en justifiant les asymptotes à $\mathcal{C}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2 \quad (1)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (3 points)

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune n boules, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante :

le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;
* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;
* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

Calculer en fonction de n la probabilité qu'il obtienne une boule noire en une partie.

On donnera directement le résultat sans justifier.

……………… (un seul résultat sans égalité)

III. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points ; 4°) 3 points)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(-1;5;0)$, $B(-1;5;2)$, $C(0;1;11)$, $D(4;4;11)$.

1°) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (Ox), (Oy) ou (Oz). Lequel ?

....

....

....

2°) La droite (CD) se trouve dans un plan *P* parallèle à l'un des plans (xOy), (yOz) ou (zOx). Lequel ? On donnera une équation de ce plan *P*.

....

....

....

3°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de (AB) et du plan *P*.

....

....

....

....

....

....

....

....

4°) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 4-5-2016
(partie commune à tous les élèves)

I.

• Les questions sont indépendantes les unes des autres.

• Pour les questions 1°) à 4°), on donnera la réponse sans justifier. En revanche, pour la question 5°), une démonstration est attendue.

• Dans les questions 3°) à 5°), le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) Soit θ un réel fixé. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{1+\text{i}}{\text{e}^{\text{i}\theta}}$.

On commence par écrire $1+\text{i}$ sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned}1+\text{i} &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\text{i}}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1+\text{i}}{\text{e}^{\text{i}\theta}} &= \frac{\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}}{\text{e}^{\text{i}\theta}}\\ &= \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\end{aligned}$$

2°) Déterminer les nombres complexes *z* de module 1 tels que $\arg\left(z^2\right)=\arg\left(\bar{z}\right)\ \ [2\pi]$.
On vérifiera que, parmi les nombres obtenus, l'un est réel. On écrira les autres sous forme exponentielle.

On utilise les propriétés des arguments.

On part de l'égalité $\arg\left(z^2\right)=\arg\left(\bar{z}\right)\ \ [2\pi]$ (1) de manière à déterminer les valeurs possibles de l'argument de *z*.

On va être obligé de remplacer le modulo 2π par 2*k*π afin de pouvoir faire des calculs (si on laisse le « modulo 2π » on sera embêté dans les calculs.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2\arg z=-\arg z\ \ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow 3\arg z=0\ \ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow 3\arg z=2k\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ &\Leftrightarrow \arg z=\frac{2k\pi}{3}\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{aligned}$$

On peut placer les points images sur le cercle trigonométrique associés aux réels de la forme $\arg z=\dfrac{2k\pi}{3}\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

On observe une périodicité de 3 et on s'aperçoit alors qu'il y a seulement trois points qui correspondent aux réels de la forme $\dfrac{2k\pi}{3}\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Les valeurs possible de l'argument de *z* sont 0 $\left(k=0\right)$, $\dfrac{2\pi}{3}$ $\left(k=1\right)$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ $\left(k=2\right)$ à 2*k*π près.

Pour $k=3$, on obtient 2π qui donne la même image que 0.

Comme les nombres complexes *z* cherchés sont de module 1, les formes exponentielles possibles sont $\text{e}^{\text{i}0}=1$, $\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$, $\text{e}^{\text{i}\frac{4\pi}{3}}$.

3°) Soit M un point quelconque de *P*, d'affixe *z*. On note R le point d'intersection du cercle de centre O passant par M et de la demi-droite fermée d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (voir graphique 1).
Exprimer l'affixe du point R en fonction de *z*.

On a $\text{OR}=\text{OM}=\left|\,z\,\right|$.

Or R appartient à la demi-droite fermée d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ donc z_{R} est un réel strictement positif donc $z_{\text{R}}=\left|\,z_{\text{R}}\,\right|=\left|\,z\,\right|$.

Le point R a pour affixe $\left|\,z\,\right|$.

4°) Soit ABCDE un pentagone régulier convexe direct inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 (voir graphique 2). Le point A a pour affixe 1.
Déterminer l'affixe du point B sous forme exponentielle.

Comme B appartient au cercle de centre O et de rayon 1, on a $\left|\,z_{\text{B}}\,\right|=\text{OB}=1$.

ABCDE est un pentagone régulier convexe donc les angles $\widehat{\text{AOB}}$, $\widehat{\text{BOC}}$, $\widehat{\text{COD}}$, $\widehat{\text{DOE}}$, $\widehat{\text{EOA}}$ ont tous la même mesure en radians : $\dfrac{2\pi}{5}$.

Comme le pentagone est direct, on a donc $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)=\dfrac{2\pi}{5}$. Par suite, $\arg z_{\text{B}}=\dfrac{2\pi}{5}\ \ [2\pi]$.

On en déduit que $z_{\text{B}}=\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{5}}$.

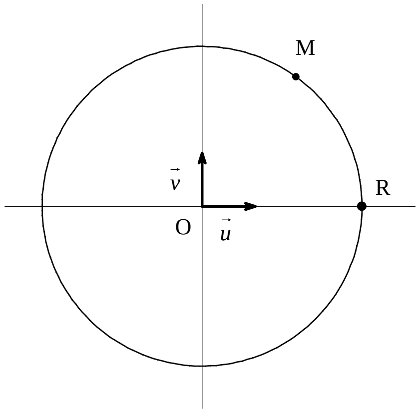
5°) Soit M un point d'affixe $e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ et J le point d'affixe – 1.

Démontrer que $JM^2 = 2 + 2\cos\theta$.

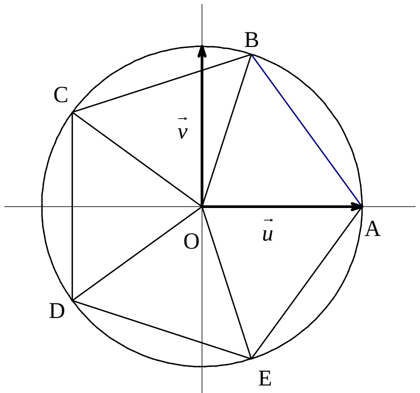
$$\begin{aligned} JM^2 &= |z_M - z_J|^2 \\ &= |e^{i\theta} + 1|^2 \\ &= |\cos\theta + i\sin\theta + 1|^2 \\ &= |(\cos\theta + 1) + i\sin\theta|^2 \\ &= (\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta + 1 \\ &= 1 + 2\cos\theta + 1 \\ &= 2 + 2\cos\theta \end{aligned}$$

Autre méthode astucieuse faite par Alexandre Cots :

$$\begin{aligned} JM^2 &= |z_M - z_J|^2 \\ &= |e^{i\theta} + 1|^2 \\ &= \left|(e^{i\theta} + 1)^2\right| \\ &= |e^{i2\theta} + 2e^{i\theta} + 1| \\ &= \left|e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + 2 + e^{-i\theta}\right)\right| \\ &= |e^{i\theta}| \times |e^{i\theta} + 2 + e^{-i\theta}| \\ &= 1 \times |e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2| \\ &= |2\cos\theta + 2| \\ &= 2\cos\theta + 2 \quad \text{(en effet, } \cos\theta \geqslant -1 \text{ donc } \cos\theta + 1 \geqslant 0 \text{ d'où } 2\cos\theta + 2 \geqslant 0\text{)} \end{aligned}$$



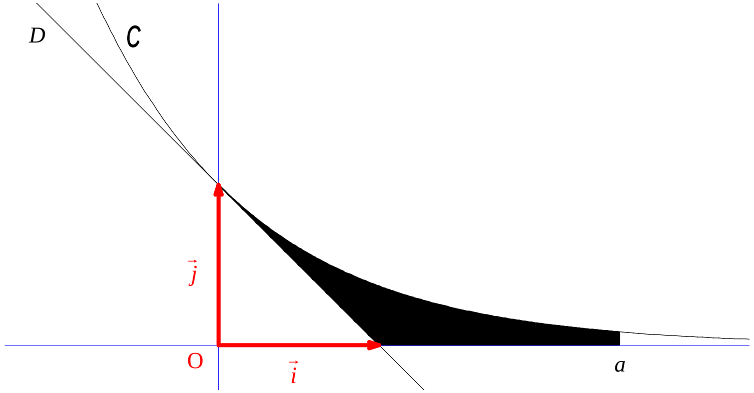
Graphique 1



Graphique 2

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.



Soit *a* un réel strictement supérieur à 1.
Exprimer en fonction de *a* l'aire $\mathcal{A}(a)$, exprimée en unité d'aire, du domaine *D* limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, la droite *D* d'équation $y = 1 - x$ et la droite d'équation $x = a$.
On admettra que $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite *D*.

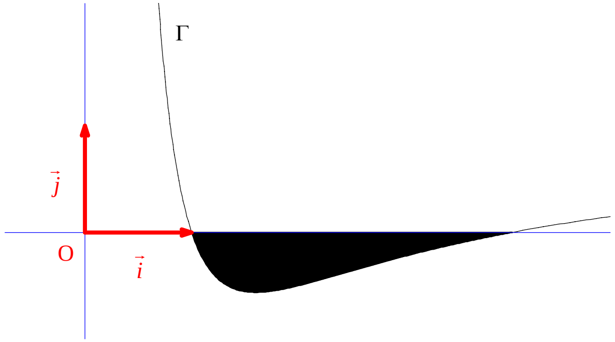
L'aire cherchée est égale à la différence entre l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\,;a]$ et l'aire du petit triangle de sommets O, $A(1\,;0)$ et $B(0\,;1)$.

L'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}$ unité d'aire (calcul très simple).

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= \int_0^a f(x)\,dx - \frac{1}{2} \\ &= \int_0^a e^{-x}\,dx - \frac{1}{2} \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^a - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - e^{-a} \end{aligned}$$

III.

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$. On note Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré (domaine compris entre la courbe Γ et l'axe des abscisses). On donnera la valeur exacte.
Aucun détail des calculs n'est demandé.

La courbe Γ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(1\,;0)$ et $(4\,;0)$ (on résout l'équation $g(x)=0$).

$\forall x \in [1\,;4]$ $\;g(x) \leqslant 0$ donc d'après le cours, $\mathcal{A} = -\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^4 \frac{x^2-5x+4}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^4 \left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\left[x-5\ln x-\frac{4}{x}\right]_1^4 \\
&= \left(1-5\ln 1-\frac{4}{1}\right)-\left(4-5\ln 4-\frac{4}{4}\right) \\
&= -3-(3-5\ln 4) \quad (\text{car } \ln 1 = 0) \\
&= 5\ln 4-6
\end{aligned}
$$

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel x différent de 0 et de – 1, on a : $f(x)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

1°) Soit a un réel strictement positif.

Calculer $I(a)=\displaystyle\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I(a) &= \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^a \left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[2\ln(x+1)-2\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]_1^a \\
&= \left(2\ln(a+1)-2\ln a\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-\left(2\ln 2-2\ln 1-\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right) \\
&= 2\ln(a+1)-2\ln a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-\left(2\ln 2-\frac{3}{2}\right) \\
&= 2\ln(a+1)-2\ln a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-2\ln 2+\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

2°) Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I(a)$.

Pour déterminer la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$, on est obligé de transformer l'expression de $I(a)$ car on tombe sur une forme indéterminée pour les termes $2\ln(a+1)-2\ln a$.

$$
\begin{aligned}
\forall a \in \left]0\,;+\infty\right[\quad I(a) &= 2\ln\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-2\ln 2+\frac{3}{2} \\
&= 2\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-2\ln 2+\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\lim_{a\to+\infty} 2\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)=0$ (limite d'une composée, non détaillée ici car très simple)

$\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)=0$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I(a)=\frac{3}{2}-2\ln 2$.

V.

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune. Le schéma ci-contre en fournit une perspective cavalière.
Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
L'unité de longueur est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $\mathrm{DD}' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.
Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.
Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie 1

1°) Calculer $f'(x)$. Écrire une étape de calcul montrant les formules utilisées puis donner le résultat final.

$$\forall x \in [0\,;20] \quad f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) - 2$$

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f* sur l'intervalle $[0\,;20]$.
On ne demande pas de détailler l'étude du signe de $f'(x)$.

x	0		$e^2 - 1$		20
SGN de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de *f*	7	↘	$10 - e^2$	↗	$21\ln 21 - 53$

3°) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est égal à
$f'(0) = \ln(0+1) - 2 = \ln 1 - 2 = -2$.

4°) On admet que la dérivée de la fonction *g* définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ est donnée par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive F de la fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;20]$.
On donnera directement l'expression de F sans détailler la démarche.

$$\mathrm{F}(x) = g(x) - \frac{3x^2}{2} + 7x$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7x^2}{4} + \frac{13x}{2}$$

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1°) Justifier que les propositions suivantes sont vraies.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

Le point le plus haut de la piste est le point $\mathrm{C}\left(20\,;21\ln 21 - 53\right)$.
Le point le plus bas de la piste est le point $\mathrm{E}\left(e^2 - 1\,;10 - e^2\right)$.

On calcule la différence entre l'ordonnée de C et l'ordonnée de E.

$y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{E}} = 21\ln 21 + e^2 - 63$

Avec la calculatrice, on obtient : $y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{E}} = 8{,}32402729...$.

Ainsi, $y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{E}} > 8$ et par suite, P_1 est vraie.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point B est égale à – 2 (démontré à la question 3°) de la partie 1).

$|-2| = 2$ donc l'inclinaison de la piste en B est égale à 2.

$f'(20) = \ln 21 - 2 = 1{,}044...$.

L'inclinaison de la piste en C est donc environ égale à 1,045.
On en déduit que l'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.
Donc P_2 est vraie.

2°) On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
Déterminer la quantité de peinture nécessaire, en litres. On donnera la valeur décimale approchée à l'unité par excès.
Écrire le calcul effectué et donner le résultat demandé directement sans expliquer.

$\mathcal{A}_{\mathrm{DD'C'C}} = 210\ln 21 - 530\ \mathrm{m}^2$ (aire d'un rectangle)

$\mathcal{A}_{\mathrm{OAB'B}} = 70\ \mathrm{m}^2$ (aire d'un rectangle)

$\mathcal{A}_{\overset{\frown}{\mathrm{ODCB}}} = 220{,}5\ln 21 - 570\ \mathrm{m}^2$ (calcul par intégrale en utilisant la primitive F)

$\mathcal{A}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB'C'D'}}} = \mathcal{A}_{\overset{\frown}{\mathrm{ODCB}}}$

Notons *S* l'aire totale des 4 faces latérales.

$S = \mathcal{A}_{\mathrm{DD'C'C}} + \mathcal{A}_{\mathrm{OAB'B}} + 2\mathcal{A}_{\mathrm{ODCB}}$

$S = 651\ln 21 - 1600\ \mathrm{m}^2$

$$\frac{S}{5}=\frac{651\ln 21-1600}{5}$$

$$\frac{S}{5}=76,3968213...$$

La valeur décimale approchée à l'unité par excès de $\frac{S}{5}$ est 77.

La quantité de peinture nécessaire pour peindre les quatre faces latérales est de 77 litres.

Autre méthode utilisant la calculatrice (notamment la commande permettant de calculer une intégrale) :

On doit calculer $T=\dfrac{2\times\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x+10\times f(0)+10\times f(20)}{5}$.

$T=\dfrac{2\times\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x+10\times(21\ln 21-53)+7\times 10}{5}$ que l'on peut éventuellement écrire sous la forme

$N=\dfrac{2\times\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x}{5}+2\times(21\ln 21-46)$.

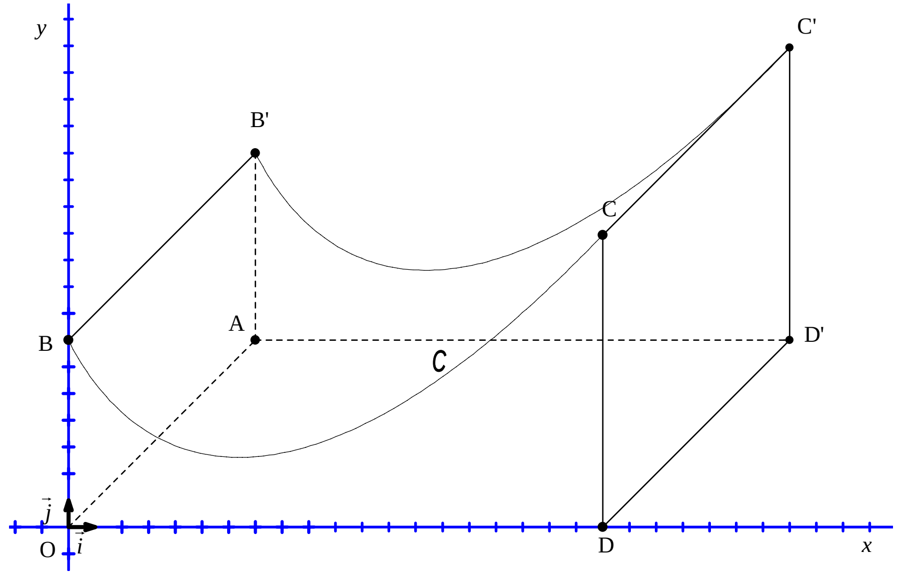
Avec la calculatrice, on obtient l'affichage : 76,39682139.

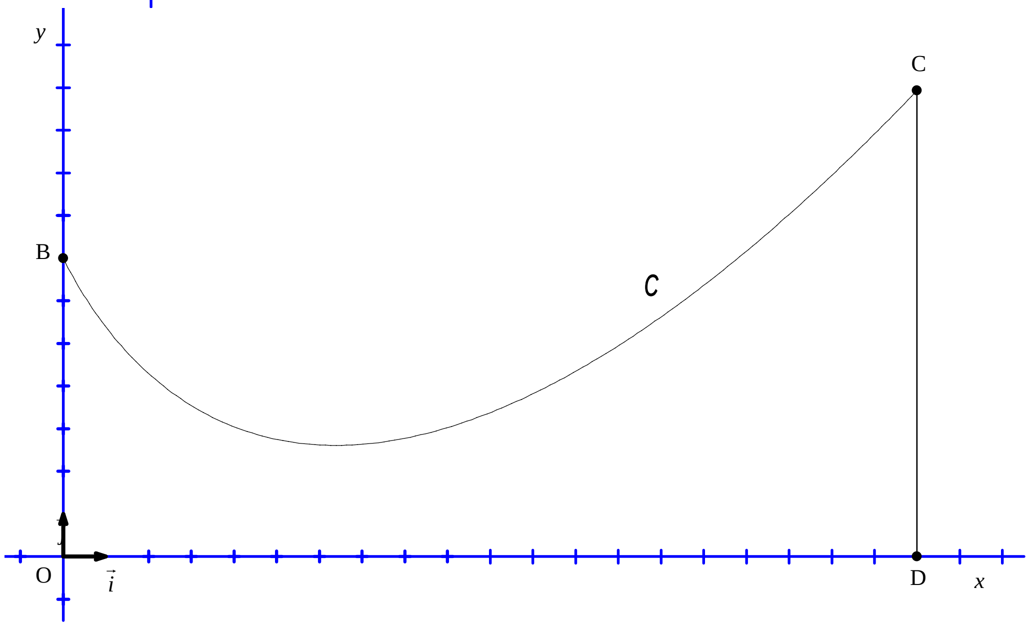
3°) On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

On admet que la longueur en mètres de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ est donné par $L=\displaystyle\int_0^{20}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au centième de l'aire de la partie roulante en m^2.

$245,34\ \mathrm{m}^2$





Corrigé de la partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques

I.

Une boîte contient 25 jetons : 3 jetons rouges, 4 jetons jaunes et 18 jetons bleus.
On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

• Lorsqu'on est en A : Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est jaune, le pion va en C. Si le jeton tiré est bleu, le pion reste en A.

• Lorsqu'on est en B : Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est jaune, le pion va en C. Si le jeton tiré est bleu, le pion reste en B.

• Lorsqu'on est en C : Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est jaune, le pion va en B. Si le jeton tiré est bleu, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A. Pour tout entier naturel *n*, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape *n*.

On note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On a : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1°) Donner sans explication la matrice T carrée d'ordre 3 telle que pour tout entier naturel *n*, $X_{n+1} = TX_n$.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{18}{25} & \frac{3}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{18}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix}$$

2°) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$. On admet les deux résultats suivants :

① P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{37}{110} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$; ② $T = P^{-1}DP$.

a) Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n où *n* est un entier naturel quelconque.

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$$

b) On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première colonne de la matrice T^n. Ainsi $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & * & * \\ \beta_n & * & * \\ \gamma_n & * & * \end{pmatrix}$

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième colonne ni ceux de la troisième colonne.

On donne dans le désordre les expressions de α_n, β_n, γ_n :

$$\frac{4-4\times 0,56^n}{11} \quad ; \quad \frac{3+7\times 0,6^n}{10} \quad ; \quad \frac{37-77\times 0,6^n+40\times 0,56^n}{110}.$$

Associer chaque terme général α_n, β_n, γ_n à l'expression correspondante (aucun détail des calculs n'est demandé sur la copie).

$$\alpha_n = \frac{3+7\times 0,6^n}{10} \qquad \beta_n = \frac{37-77\times 0,6^n+40\times 0,56^n}{110} \qquad \gamma_n = \frac{4-4\times 0,56^n}{11}$$

En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de *n*.

$$a_n = \frac{3+7\times 0,6^n}{10} \qquad b_n = \frac{37-77\times 0,6^n+40\times 0,56^n}{110} \qquad c_n = \frac{4-4\times 0,56^n}{11}$$

$T^n = P^{-1}D^nP$ (propriété du cours)

$$T^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{37}{110} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{37}{110} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7\times 0,6^n & -3\times 0,6^n & -3\times 0,6^n \\ 4\times 0,56^n & 4\times 0,56^n & -7\times 0,56^n \end{pmatrix}$$

On achève le calcul des coefficients de la première colonne afin de trouver les expressions de a_n, b_n, c_n.

c) Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n). On ne détaillera que le calcul de la limite de (a_n) et on donnera les autres limites sans détailler.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$ car $-1 < 0,6 < 1$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{10}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{87}{110}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{4}{11}$

d) Sur quel sommet a-t-on « le plus de chance » de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ? Répondre en justifiant par une phrase.

Après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire, on a le plus de chance de se retrouver sur le sommet C.

II.

Une entreprise commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et B. Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre :
• si, une semaine donnée, il fait ses achats auprès du fournisseur A, la probabilité qu'il fasse aussi ses achats auprès du fournisseur A la semaine suivante est égale à 0,95 ;
• si, une semaine donnée, il fait ses achats auprès du fournisseur B, la probabilité qu'il fasse aussi ses achats auprès du fournisseur B la semaine suivante est égale à 0,9.
On note $\mathcal{G}$ le graphe probabiliste à deux sommets correspondant à l'état 1 : « La commande est passée auprès du fournisseur A » et l'état 2 : « La commande est passée auprès du fournisseur B ».

1°) Donner sans explication la matrice de transition en colonnes M du graphe $\mathcal{G}$ en prenant les sommets dans l'ordre état 1 - état 2.

$$\text{M} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}$$

2°) Déterminer l'état stable S de $\mathcal{G}$. On ne demande pas d'expliquer.

L'état stable S de $\mathcal{G}$ est la matrice $\text{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On applique la méthode classique.

On pose $\text{S} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels positifs ou nuls tels que $a+b=1$ (1).
L'égalité $\text{MS}=\text{S}$ (2) conduit à un système que l'on résout.

$(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,95a + 0,1b = a \\ 0,05a + 0,9b = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,1b = 0,05a \\ 0,05a = 0,1b \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0,05a = 0,1b$

$\Leftrightarrow 5a = 10b$

$\Leftrightarrow a = 2b$

L'égalité (1) donne alors $2b+b=1$ d'où $3b=1$ soit $b=\frac{1}{3}$. Par suite, $a=\frac{2}{3}$.

On trouve l'état stable $\text{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

3°) Sachant que, la semaine 0, la probabilité qu'il fasse ses achats auprès de A est 0,4 et la probabilité qu'il fasse ses achats auprès de B est 0,6, déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur B.
On répondra par une phrase sans expliquer.

À la troisième semaine, la probabilité que l'entreprise commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépassera pour la première fois la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur B.

III.

Les sites Internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.
• Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
• Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
• Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.
L'unité de temps est la minute.
Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera. Il se connecte à l'instant $t=0$ sur le site C et commence sa navigation.

1°) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t=1$ le site A soit infecté ?

0,2 (un seul résultat sans explication)

La probabilité de passer du site C au site A en une minute est de 0,2 ; la probabilité qu'à l'instant $t=1$ le site A soit infecté est donc égale à 0,2.

2°) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?
Donner le résultat puis écrire sur une ligne le calcul effectué pour trouver le résultat.

0,04 (un seul résultat sans explication)

$$0,2 \times 0,2 = 0,04$$

Pour qu'en deux minutes les trois sites soient infectés, il faut aller de C vers A puis vers B, ou de C vers B puis vers A.
Il est impossible d'aller de C vers B.
On va de C vers A avec une probabilité de 0,2 et de A vers B avec une probabilité de 0,2 ; on va donc de C vers A puis vers B avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.
La probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés est donc égale à 0,04.

Corrigé de la partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Déterminer en justifiant les asymptotes à $\mathcal{C}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

On vérifie ce résultat en traçant la courbe sur la calculatrice.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) = 1\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y=3$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

On vérifie ce résultat en traçant la courbe sur la calculatrice.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\mathrm{e}^{-2x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2x = \ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2x = -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$S = \left\{\frac{\ln 2}{2}\right\}$$

II.

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune n boules, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante :

le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;

* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;

* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

Calculer en fonction de n la probabilité qu'il obtienne une boule noire en une partie.

On donnera directement le résultat sans justifier.

$$\frac{5}{3n}$$

On considère les événements suivants :

A : « obtenir le numéro 1 au lancer du dé » ;

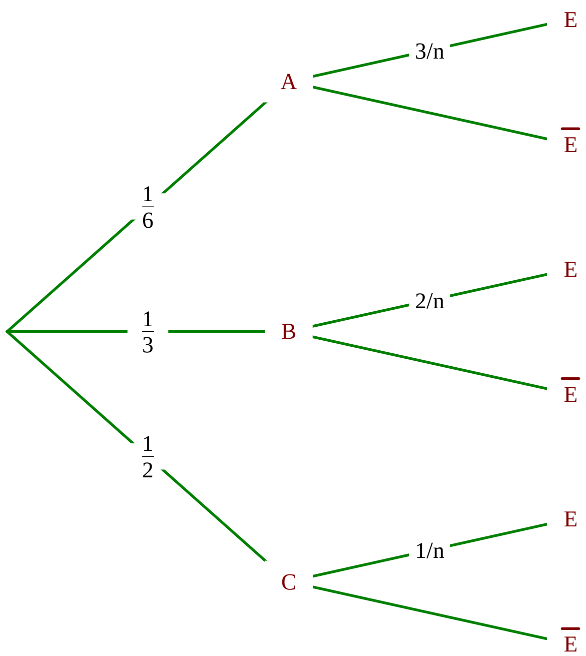
B : « obtenir un multiple de 3 au lancer du dé » ;

C : « obtenir un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 au lancer du dé » ;

E : « tirer une boule noire ».

Il est conseillé de faire un arbre de probabilités.

A, B, C constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales.



$$P(\text{E}) = P(\text{A}) \times P(\text{E}/\text{A}) + P(\text{B}) \times P(\text{E}/\text{B}) + P(\text{C}) \times P(\text{E}/\text{C})$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{n} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{n} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{10}{6n}$$

$$= \frac{5}{3n}$$

III.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\text{A}(-1;5;0)$, $\text{B}(-1;5;2)$, $\text{C}(0;1;11)$, $\text{D}(4;4;11)$.

1°) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes $(\text{O}x)$, $(\text{O}y)$ ou $(\text{O}z)$. Lequel ?

$\overrightarrow{\text{AB}}(0;0;2)$

$\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{k}$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires.

Par suite, $(\text{AB}) \mathbin{//} (\text{O}z)$.

2°) La droite (CD) se trouve dans un plan *P* parallèle à l'un des plans $(x\text{O}y)$, $(y\text{O}z)$ ou $(z\text{O}x)$. Lequel ? On donnera une équation de ce plan *P*.

On a $z_{\text{C}} = z_{\text{D}} = 11$ donc C et D appartiennent au plan *P* d'équation $z = 11$.
On sait d'après cette équation que $P \mathbin{//} (x\text{O}y)$.

Par suite, $(\text{CD}) \subset P$.

3°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de (AB) et du plan *P*.

Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) s'écrit $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Donc $x_{\text{E}} = -1$ et $y_{\text{E}} = 5$.

De plus, $\text{E} \in P$ et *P* a pour équation $z = 11$ donc $z_{\text{E}} = 11$.

On en déduit que E a pour coordonnées $(-1;5;11)$.

4°) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

On sait que $(\text{CD}) \subset P$ et que (AB) coupe *P* au point $\text{E}(-1;5;11)$.
Donc si (AB) et (CD) sont sécantes, nécessairement elles se coupent en E.
On peut donc chercher si $\text{E} \in (\text{CD})$.

$\overrightarrow{\text{CE}}(-1;4;0)$
$\overrightarrow{\text{CD}}(4;3;0)$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{CE}}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, les points C, D, E ne sont pas alignés.
Donc $\text{E} \notin (\text{CD})$.

On en déduit que les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.