1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 5 avril 2016 (50 minutes)

Prénom : …………………………………. **Nom :** ……………………………..……

Note : …. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un triangle ABC vérifiant les conditions suivantes :

- l’aire de ABC est égale à $5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
- $\text{AB} = 4\ \text{cm}$
- $\widehat{\text{BAC}} = 60°$.

Il est demandé d’appliquer les formules en situation.

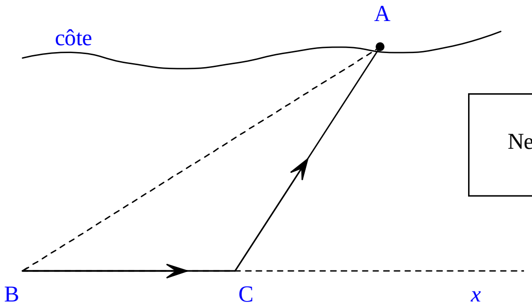
1°) Calculer AC (valeur exacte).

2°) Calculer BC (valeur exacte).

II. (4 points)

Pour rentrer au port en A, un bateau doit passer par C car la profondeur est insuffisante entre B et A. Il avance à la vitesse de $24\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et met 20 minutes pour aller de B en C. Au départ, le capitaine mesure l’angle $\widehat{\text{ABC}}$ et trouve 32°. Avant de changer de cap, il mesure l’angle $\widehat{\text{AC}x}$ et trouve 57° ([Cx) est la demi-droite opposée à [CB)).

Calculer la distance AB (en kilomètres, arrondie au centième).



Ne rien écrire sur la figure.

Il est demandé d’appliquer les formules en situation et de ne pas introduire de points.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - 2 \times 9^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = -16 \times 9^n$.
On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).
La première étape est donnée et l'on rappelle que $9^{n+1} = 9 \times 9^n$.

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \left(1 - 2 \times 9^{n+1}\right) - \left(1 - 2 \times 9^n\right)$

= ....

= ....

= ....

= ....

2°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque. Après une courte étude, on conclura par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} - u_n < 0$.

……..

……..

……..

……..

3°) En déduire le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.
On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 2°), la suite $\left(u_n\right)$ est strictement …. ».

……..

IV. (1 point)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = -228$ et de raison $\frac{1}{3}$.

Calculer u_{298}.

…………………….. (une seule égalité)

V. (3 points)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = a$ $\left(a \in \mathbb{R}\right)$ et de raison – 6.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

• Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

………………………… (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S_n en fonction de *n* et de *a* (*n* étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
Les seules lettres figurant dans le membre de droite doivent être les lettres *n* et *a*.

$S_n =$ ....

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit $\left(u_n\right)$ une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_5 = -48$ et $u_{16} = -125$.

1°) Calculer la raison *r* de la suite.

…………………….. (une seule égalité)

2°) Calculer $S = u_5 + u_6 + ... + u_{16}$ (on peut écrire $S = \sum_{k=5}^{k=16} u_k$).

…………………….. (une seule égalité)

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Une personne doit rembourser un prêt de 8000 €. Le remboursement se fait en 24 mensualités. La première mensualité est de 250 €. Les mensualités augmentent de 10 € par mois.

1°) Calculer la somme totale remboursée après 24 mensualités.

……………………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) En déduire le coût du prêt en euros (coût = montant total remboursé – montant du prêt) ainsi que le pourcentage qu'il représente par rapport au montant du prêt.

…………………………………..   …………………………………..

Corrigé du contrôle du 5-4-2016

I.

On considère un triangle ABC vérifiant les conditions suivantes :

- l'aire de ABC est égale à $5\sqrt{3}$ cm^2
- $AB = 4$ cm
- $\widehat{BAC} = 60°$.

Il est demandé d'appliquer les formules en situation.
1°) Calculer AC (valeur exacte).
2°) Calculer BC (valeur exacte).

1°)

On a : $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{BAC} \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 5\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times AC \times \sin 60°$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{3} = 2 \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5\cancel{\sqrt{3}} = AC\cancel{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow AC = 5 \text{ cm}$$

2°)

D'après la formule du côté dans le triangle, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$= 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60°$$

$$= 16 + 25 - \cancel{2} \times 4 \times 5 \times \frac{1}{\cancel{2}}$$

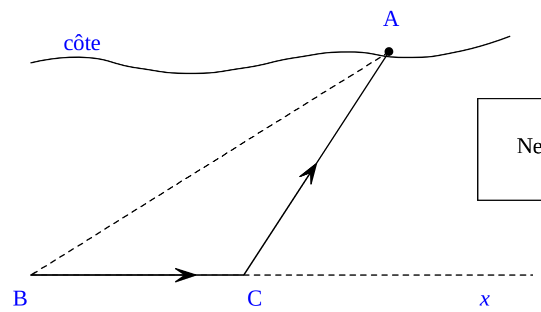
$$= 41 - 20$$

$$= 21$$

Donc $BC = \sqrt{21}$ cm.

II.

Pour rentrer au port en A, un bateau doit passer par C car la profondeur est insuffisante entre B et A. Il avance à la vitesse de $24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et met 20 minutes pour aller de B en C. Au départ, le capitaine mesure l'angle $\widehat{ABC}$ et trouve 32°. Avant de changer de cap, il mesure l'angle $\widehat{ACx}$ et trouve 57° ([Cx) est la demi-droite opposée à [CB]).
Calculer la distance AB (en kilomètres, arrondie au centième).



Ne rien écrire sur la figure.

Il est demandé d'appliquer les formules en situation et de ne pas introduire de points.

On commence par calculer la distance BC.

$$BC = \left(24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}\right) \times \left(\frac{1}{3} \text{ h}\right) \quad \left(\text{car } 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}\right)$$

$$BC = 8 \text{ km}$$

On a : $\widehat{ACB} = 180° - \widehat{ACx} = 123°$.

On a : $\widehat{BAC} = 180° - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 25°$.

D'après la loi des sinus, on a : $\dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{ABC}}$.

On a donc $\dfrac{8}{\sin 25°} = \dfrac{AB}{\sin 123°}$ d'où $AB = \dfrac{8 \times \sin 123°}{\sin 25°}$.

On en déduit que $AB \approx 15,87$ km (valeur arrondie au centième).

III.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - 2\times 9^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = -16\times 9^n$.
On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).
La première étape est donnée et l'on rappelle que $9^{n+1} = 9\times 9^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = \left(1-2\times 9^{n+1}\right) - \left(1 - 2\times 9^n\right)$

$= 1 - 2\times 9^n \times 9 - 1 + 2\times 9^n$

$= -18\times 9^n + 2\times 9^n$

$= 9^n \times (-18+2)$

$= -16\times 9^n$

2°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque. Après une courte étude, on conclura par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \ -16\times 9^n < 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.

3°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement …. ».

D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement décroissante (à partir de l'indice 0).

IV.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = -228$ et de raison $\frac{1}{3}$.
Calculer u_{298}.

– 129 (une seule égalité)

$u_{298} = u_1 + (298-1)\times\frac{1}{3}$

$= -228 + \frac{297}{3}$

$= -228 + 99$

$= -129$

V.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = a$ $(a \in \mathbb{R})$ et de raison – 6.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

• Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

$n+1$ (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S_n en fonction de *n* et de *a* (*n* étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
Les seules lettres figurant dans le membre de droite doivent être les lettres *n* et *a*.

$S_n = (n+1)(a-3n)$

$S_n = (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$

$= (n+1)\times\frac{u_0+u_0-6n}{2}$

$= (n+1)\times\frac{2a-6n}{2}$

$= (n+1)\times(a-3n)$

VI.

Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_5 = -48$ et $u_{16} = -125$.

1°) Calculer la raison r de la suite.

$r = -7$ (une seule égalité)

2°) Calculer $S = u_5 + u_6 + ... + u_{16}$ (on peut écrire $S = \sum_{k=5}^{k=16} u_k$).

$S = -1038$ (une seule égalité)

On peut appliquer la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique $S = 11 \times \frac{u_5 + u_{16}}{2}$ ou calculer les termes successifs de la suite de u_5 et u_{16}.

VII.

Une personne doit rembourser un prêt de 8000 €. Le remboursement se fait en 24 mensualités. La première mensualité est de 250 €. Les mensualités augmentent de 10 € par mois.

1°) Calculer la somme totale remboursée après 24 mensualités.

8760 € (un seul résultat sans égalité)

2°) En déduire le coût du prêt en euros (coût = montant total remboursé – montant du prêt) ainsi que le pourcentage qu'il représente par rapport au montant du prêt.

760 € 9,5 %

On note u_n le montant de la n-ième mensualité remboursée en euros $(n \geqslant 1)$.

(u_n) est une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 250$ et de raison 10.

La somme totale remboursée après 24 mensualités est $S = u_1 + u_2 + ... + u_{24}$.

On sait que $S = 24 \times \frac{u_1 + u_{24}}{2}$.

On calcule u_{24}.

$$\begin{aligned} u_{24} &= u_1 + 23 \times 10 \\ &= 250 + 230 \\ &= 480 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} S &= 24 \times \frac{250 + 480}{2} \\ &= 8760 \end{aligned}$$

2°)

Le coût du prêt en euros est égal à $8760 - 8000 = 760$ €.

Pour calculer le pourcentage qu'il représente par rapport au montant du prêt, on effectue le calcul : $\frac{760}{8000} \times 100 = 9,5$.