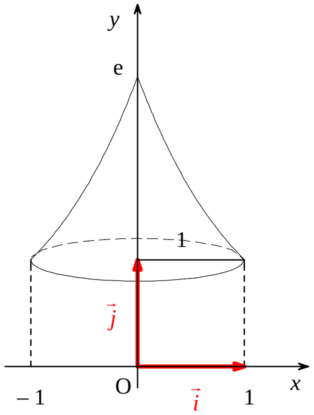
TS1

Contrôle du mardi 29 mars 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : …….. / 20**

I. (5 points : 2 points ; 2 °) 3 points)

On considère le « petit chapeau » ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe $(\mathrm{O}y)$ de la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{1-x}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.



On admet que le volume de ce « petit chapeau » est égal à :

$$\mathrm{V} = \pi \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - 1)^2 \, \mathrm{d}x .$$

1°) Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto 5x - 4x\ln x + x(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto (\ln x - 1)^2$.

2°) Déterminer la valeur exacte de V.

II. (5 points)

Soit n un entier naturel quelconque.

Calculer $\mathrm{A} = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(1 - |\,x-1\,|\right)^n \, \mathrm{d}x$ en fonction de n.

III. (5 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 1$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. On note I le milieu de [EF].

Le but de l'exercice est de calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\mathrm{AG}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ en utilisant deux méthodes indépendantes.

1°) **1ère méthode :**

Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$. On donnera directement le résultat.

……

Faire le calcul de p en utilisant la décomposition précédente et l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EI}}$.

……

……

……

……

……

2°) **2e méthode :**

a) Exprimer AG en fonction de a. On donnera directement le résultat sans justifier.

……………………………….. (une seule égalité)

b) Quelle est la nature du triangle AIG ? Justifier brièvement.

……

……

……

……

c) Calculer p en utilisant le projeté orthogonal de I sur la droite (AG).

……

……

……

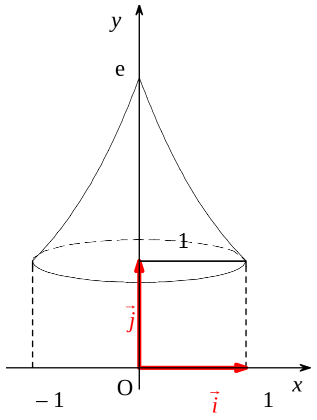
……

……

Corrigé du contrôle du 29-3-2016

I.

On considère le « petit chapeau » ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe (Oy) de la courbe d'équation $y = e^{1-x}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.



On admet que le volume de ce « petit chapeau » est égal à :

$V = \pi \displaystyle\int_1^e (\ln x - 1)^2 \, dx$.

1°) Démontrer que la fonction $F : x \mapsto 5x - 4x\ln x + x(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto (\ln x - 1)^2$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = 5 - 4\ln x - \frac{4x}{x} + (\ln x)^2 + \frac{2x\ln x}{x}$$

$$= 5 - 4\ln x - 4 + (\ln x)^2 + 2\ln x$$

$$= (\ln x)^2 - 2\ln x + 1$$

$$= (\ln x - 1)^2$$

$$= f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) Déterminer la valeur exacte de V.

$$V = \pi \int_1^e f(x) \, dx$$

$$= \pi \left[F(x)\right]_1^e$$

$$= \pi \, (5e - 4e + e - 5)$$

$$= \pi \, (2e - 5) \quad \text{(unités de volume)}$$

Il est recommandé de calculer $F(e)$ et $F(1)$ à part.

II.

Soit n un entier naturel quelconque.

Calculer $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (1 - |x-1|)^n \, dx$ en fonction de n.

$$A = \int_{-1}^{1} (1 - (1-x))^n \, dx + \int_{1}^{2} (1 - (x-1))^n \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^n \, dx + \int_{1}^{2} (2-x)^n \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{(2-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2 - (-1)^{n+1}}{n+1}$$

III.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}} \, dx$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $e^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 1$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $[0\,;1]$.

On a : $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ donc $0 \geqslant -\dfrac{x^2}{n} \geqslant -\dfrac{1}{n}$ d'où $1 \geqslant e^{-\frac{x^2}{n}} \geqslant e^{-\frac{1}{n}}$.

Ainsi $\forall x \in [0\,;1] \quad e^{-\frac{1}{n}} \leqslant e^{-\frac{x^2}{n}} \leqslant 1$.

Par croissance de l'intégrale, comme les bornes sont dans le « bon » sens, $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{n}} \, dx \leqslant \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}} \, dx \leqslant \int_0^1 1 \, dx$.

On en déduit que $e^{-\frac{1}{n}} \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}} \, dx \leqslant 1$ soit $e^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}}=1 \ \text{(limite de composée assez simple)}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1=1\end{array}\right\}$$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

IV.

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$. On note I le milieu de [EF].

Le but de l'exercice est de calculer le produit scalaire $p=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}$ en utilisant deux méthodes indépendantes.

1°) **1ère méthode :**

Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. On donnera directement le résultat.

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

Faire le calcul de p en utilisant la décomposition précédente et l'égalité $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}$.

On commence par faire une figure.

$p=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EI}$

$=0+a\times\dfrac{a}{2}+0+0+a\times a+0$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont deux vecteurs de même sens donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EI}=AB\times EI=a\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$;
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}^2=AE^2=a^2$; les autres produits scalaires valent 0 par orthogonalité

$=\dfrac{3a^2}{2}$

2°) **2e méthode :**

a) Exprimer AG en fonction de a. On donnera directement le résultat sans justifier.

$$AG=a\sqrt{3} \ \text{(une seule égalité)}$$

b) Quelle est la nature du triangle AIG ? Justifier brièvement.

On compare les distances IA et IG.

Les triangles AEI et IFG sont des triangles isométriques.
Ils son en effet tous les deux rectangles et les côtés de l'angle droit de chacun ont pour longueurs a et $\dfrac{a}{2}$.
Les hypoténuses de ces deux triangles ont donc la même longueur.

On en déduit que le triangle AIG est isocèle en I.

Remarques :

- On a $IA=IG=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ par application du théorème de Pythagore.

- Le triangle AIG n'est pas rectangle en I contrairement à ce que j'ai trouvé chez plusieurs élèves !

c) Calculer p en utilisant le projeté orthogonal de I sur la droite (AG).

On note J le projeté orthogonal de I sur (AG).
Comme le triangle AIG est isocèle en I, J est le milieu de $[AG]$.

$p=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AJ}$

$=AG\times AJ$

$=a\sqrt{3}\times\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{3a^2}{2}$