TS1

Contrôle du mardi 22 mars 2016 (60 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

……..

……..

……..

……..

2°) Démontrer que pour tout réel a, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = a$. On donnera le détail des calculs.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

II. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

Calculer $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$, $J = \displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{e^x}\,dx$, $K = \displaystyle\int_{-10}^{-2} \frac{dx}{2x}$. On attend les valeurs exactes.

Présenter les calculs succinctement en trois ou quatre lignes.

……..

……..

……..

……..

III. (1 point)

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \ln(\ln x)\,dx$.

……………………………….. (un seul résultat, sans égalité)

IV. (2 points)

On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

Justifier que F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

……..

……..

……..

……..

……..

V. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points ; 5°) a) 1 point ; b) 1 point)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x)=\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de x.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $-\pi \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \pi$.

………

………

………

………

………

………

………

2°) Démontrer que la fonction F est paire.

………

………

………

………

3°) Déterminer la valeur de $\mathrm{F}(0)$.

………

………

………

4°) Étudier le sens de variation de F sur $[0\,;\pi]$.

Indication : Considérer deux réels quelconques x et y de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tels que $x \leqslant y$ et comparer $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}(y)$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

5°) Tracer la courbe représentative de la fonction F sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ sur l'écran de la calculatrice. On pensera à mettre la calculatrice en mode « radian ».

a) On admet que l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ telles que $x_1 < x_2$.

Déterminer la valeur décimale approchée au millième par défaut de x_1 et x_2.

………………… (un seul résultat sans égalité) ………………… (un seul résultat sans égalité)

b) On admet que F admet un minimum global sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ atteint en un réel x_0.

Déterminer la valeur décimale approchée au millième par défaut de x_0 et de $\mathrm{F}(x_0)$.

………………… (un seul résultat sans égalité) ………………… (un seul résultat sans égalité)

Corrigé du contrôle du 22-3-2016

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1 \times e^{-x}}{\left(e^x+1\right)\times e^{-x}}$$

$$= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

2°) Démontrer que pour tout réel a, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = a$. On donnera le détail des calculs.

On utilise le résultat du 1°) pour déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de f est $\mathbb{R}$ est la fonction $F : x \mapsto -\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$= -\ln\left(1+e^{-a}\right) + \ln\left(1+e^{a}\right)$$

$$= -\ln\left(1+\frac{1}{e^a}\right) + \ln\left(1+e^{a}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{e^a+1}{e^a}\right) + \ln\left(1+e^{a}\right)$$

$$= \cancel{-\ln\left(e^a+1\right)} + \ln e^a + \cancel{\ln\left(1+e^a\right)}$$

$$= a$$

II.

Calculer $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$, $J = \displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{e^x}\,dx$, $K = \displaystyle\int_{-10}^{-2} \frac{dx}{2x}$. On attend les valeurs exactes.

Présenter les calculs succinctement en trois ou quatre lignes.

$$I = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}\right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$J = \int_{0}^{2} e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_{0}^{2}$$

$$= 2e - 2$$

$$K = \frac{1}{2}\int_{-10}^{-2} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x|\right]_{-10}^{-2}$$

$$= \frac{\ln 2 - \ln 10}{2}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{2}{10}\right)}{2}$$

$$= \frac{\ln \frac{1}{5}}{2}$$

$$= -\frac{\ln 5}{2}$$

● Calcul de I :

Pour déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$, on pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x) = 1 - x^3$. On a alors $u'(x) = -3x^2$.

On peut donc écrire $f(x) = -\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-3x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ donc $f = -\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Une primitive de f est donc la fonction $F = -\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{u} = -\dfrac{2}{3}\sqrt{u}$.

Une primitive de la fonction f est donc la fonction $F : x \mapsto -\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^3}$.

● Calcul de K :

On utilise deux propriétés du logarithme népérien : $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$ et $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$ (égalités valables pour des réels strictement positifs a et b)

III.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\int_{e}^{e^2} \ln(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

2,063 (un seul résultat, sans égalité)

On obtient l'affichage : 2,0625868662.

IV.

On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

Justifier que F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

Considérons la fonction $u : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{t}}$.

La fonction u est continue sur $]0\,;+\infty[$.

De plus, $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad \mathrm{F}(x)=\int_1^x u(t)\ \mathrm{d}t$.

D'après le théorème du cours, F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad \mathrm{F}'(x)=u(x)$ soit

$\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad \mathrm{F}'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

V.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x)=\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de x.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $-\pi\leqslant \mathrm{F}(x)\leqslant\pi$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\leqslant\cos(x\sin t)\leqslant 1$

Par croissance de l'intégrale, comme les bornes sont dans le « bon » sens (c'est-à-dire $0\leqslant\pi$) puisque, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \int_0^{\pi}-1\ \mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\pi}1\ \mathrm{d}t$$

soit $\forall x\in\mathbb{R}\qquad -\int_0^{\pi}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\pi}\mathrm{d}t$

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}\quad -\pi\leqslant\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t\leqslant\pi$ (on utilise le résultat sur l'intégrale d'une fonction constante).

Donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad -\pi\leqslant\mathrm{F}(x)\leqslant\pi$.

2°) Démontrer que la fonction F est paire.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}(-x)=\int_0^{\pi}\cos(-x\sin t)\ \mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{F}(x)$$

On en déduit que F est paire.

3°) Déterminer la valeur de $\mathrm{F}(0)$.

$$\mathrm{F}(0)=\int_0^{\pi}\cos(0\sin t)\ \mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\cos 0\ \mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}1\ \mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}t$$

$$=\pi-0$$

$$=\pi$$

4°) Étudier le sens de variation de F sur $[0\,;\pi]$.

Indication : Considérer deux réels quelconques x et y de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tels que $x \leqslant y$ et comparer $F(x)$ et $F(y)$.

On travaille avec des inégalités larges car dans le cours, les propriétés d'ordre pour les intégrales sont données avec des inégalités larges.

Soit x et y deux réels quelconques de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tels que $x \leqslant y$.
Comparons $F(x)$ et $F(y)$.

$\forall t \in [0\,;\pi] \quad \sin t \geqslant 0$ donc $x\sin t \leqslant y\sin t$.

De plus comme $\sin t \leqslant 1$, on a $y\sin t \leqslant y \leqslant \pi$.
Par ailleurs, $x\sin t \geqslant 0$.
Ainsi, $x\sin t$ et $y\sin t$ sont des réels de l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Or la fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Donc $\forall t \in [0\,;\pi] \quad \cos(x\sin t) \geqslant \cos(y\sin t)$.

Par croissance de l'intégrale, comme les bornes sont dans le « bon » sens, on peut écrire :

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi} \cos(y\sin t)\ \mathrm{d}t.$$

On a donc $F(x) \geqslant F(y)$.
Par conséquent, F est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Il fallait bien comprendre que l'intégrale n'est pas calculable comme indiqué dans l'énoncé.
Quelques élèves ont quand même cherché à calculer l'intégrale.
Bien que l'intégrale soit non calculable, il fallait tout de même considérer l'intégrale.

5°) Tracer la courbe représentative de la fonction F sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ sur l'écran de la calculatrice. On pensera à mettre la calculatrice en mode « radian ».

a) On admet que l'équation $F(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ telles que $x_1 < x_2$.

Déterminer la valeur décimale approchée au millième par défaut de x_1 et x_2.

2,404 (un seul résultat sans égalité) 5,520 (un seul résultat sans égalité)

C'est très long sur la calculatrice !

On obtient l'affichage 2,4048256 pour x_1 et l'affichage 5,5200781 pour x_2.

b) On admet que F admet un minimum global sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ atteint en un réel x_0.
Déterminer la valeur décimale approchée au millième par défaut de x_0 et de $F(x_0)$.

3,831 (un seul résultat sans égalité) – 1,266 (un seul résultat sans égalité)

On obtient l'affichage suivant :

$\text{Min} = 3{,}8317051$ et $\text{Y} = -1{,}265306$