TS1

Contrôle du mardi 15 mars 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ....

Note : .... **/ 20**

I. (4 points)

Compléter sans ratures et le plus lisiblement possible le tableau suivant où f désigne une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$\dfrac{1}{x(\ln x)^3}$	$]1\,;+\infty[$	....
$\dfrac{x^2}{1-x^3}$	$]1\,;+\infty[$	....
$\dfrac{\cos x}{(2-\sin x)^2}$	$\mathbb{R}$	....
$\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$	$]-\infty\,;3[$	....

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1°) Vérifier que pour tout réel $x \neq -1$, on a $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

....

....

....

....

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

$F(x)=$ ....

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(e^{-x}+2e^{3x}\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$F(x)=$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

IV. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1\,;3\,;2)$, $B(2\,;0\,;4)$ et $C(1\,;2\,;3)$.

1°) Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan puis donner sans expliquer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

$$(ABC)\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

2°) Donner sans explication un système d'équations paramétriques de la droite (AC).

$$(AC)\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

3°) Déterminer les coordonnées du point E d'intersection de la droite (AC) et du plan (xOz).

E(……..;……..;……..)

4°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite *D*, parallèle à (AC) passant par le point B. Répondre sans détailler la démarche.

$$D\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

5°) Soit D' la droite dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 3\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Étudier la position relative des droites D' et (AC).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 15-3-2016

I.

Compléter sans ratures et le plus lisiblement possible le tableau suivant où f désigne une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$\dfrac{1}{x(\ln x)^3}$	$]1\,;+\infty[$	$-\dfrac{1}{2(\ln x)^2}$
$\dfrac{x^2}{1-x^3}$	$]1\,;+\infty[$	$-\dfrac{1}{3}\ln\left\|1-x^3\right\|=-\dfrac{1}{3}\ln\left(x^3-1\right)$
$\dfrac{\cos x}{(2-\sin x)^2}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{2-\sin x}$
$\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$	$]-\infty\,;3[$	$-2\sqrt{3-x}$

• Pour la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x(\ln x)^3}$, on utilise la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $n=3$ (grâce à la réécriture $\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^3}$).

• Pour la fonction $x\mapsto\dfrac{x^2}{1-x^3}$, on utilise la forme $\dfrac{u'}{u}$ (grâce à la réécriture $-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-3x^2}{1-x^3}$).

Une primitive de cette fonction sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ est la fonction $x\mapsto-\dfrac{1}{3}\ln\left|1-x^3\right|$.

Or $\forall x\in\,]1\,;+\infty[\quad 1-x^3<0$ donc $\left|1-x^3\right|=-\left(1-x^3\right)=x^3-1$.

II.

On considère la fonction $f : x\mapsto\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1°) Vérifier que pour tout réel $x\neq-1$, on a $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad 1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2\cancel{+2x}\cancel{+1}\cancel{-2x}\cancel{-2}\cancel{+1}}{(x+1)^2}$$

$$=\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$

$$=f(x)$$

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

$$F(x)=x-2\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{x+1}$$

III.

On considère la fonction $f : x\mapsto\left(e^{-x}+2e^{3x}\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}+2e^{2x}+\frac{2}{3}e^{6x}$$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=e^{-2x}+4e^{2x}+4e^{6x}$ (développement par identité remarquable)

Ensuite, on cherche une primitive de chacune des fonctions $x\mapsto e^{-2x}$, $x\mapsto 4e^{2x}$, $x\mapsto 4e^{6x}$.

Cet exercice n'a pas été réussi par un certain nombre d'élèves qui n'ont pas vu qu'il fallait transformer l'expression en la développant.

IV.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\text{A}(1\,;3\,;2)$, $\text{B}(2\,;0\,;4)$ et $\text{C}(1\,;2\,;3)$.

1°) Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan puis donner sans expliquer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).

$\overrightarrow{\text{AB}}(1\,;-3\,;2)$ $\overrightarrow{\text{AC}}(0\,;-1\,;1)$

Il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{\text{AC}} = \lambda\overrightarrow{\text{AB}}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires et, par suite, les points A, B, C ne sont pas alignés. Par conséquent, A, B, C définissant un plan.

$$(\text{ABC}) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t - t' + 3 \\ z = 2t + t' + 2 \end{cases} \quad \left((t\,;t') \in \mathbb{R}^2\right)$$

2°) Donner sans explication un système d'équations paramétriques de la droite (AC).

$$(\text{AC}) \begin{cases} x = 1 \\ y = -t'' + 3 \\ z = t'' + 2 \end{cases} \quad (t'' \in \mathbb{R})$$

3°) Déterminer les coordonnées du point E d'intersection de la droite (AC) et du plan $(x\text{O}z)$.

$$\text{E}(1\,;0\,;5)$$

4°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D, parallèle à (AC) passant par le point B. Répondre sans détailler la démarche.

$$D \begin{cases} x = 2 \\ y = -\mu \\ z = \mu + 4 \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

5°) Soit D' la droite dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 3\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Étudier la position relative des droites D' et (AC).

On sait que le vecteur $\vec{u}(1\,;-1\,;3)$ est un vecteur directeur de D'.

On constate que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites D' et (AC) ne sont pas parallèles.

Pour savoir si D' et (AC) sont sécantes, on résout le système $\begin{cases} \lambda = 1 & (1) \\ -t'' + 3 = -\lambda + 3 & (2) \\ t'' + 2 = 3\lambda & (3) \end{cases}$.

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ t'' = 1 \end{cases}$$

On vérifie que ces valeurs conviennent dans (3).

Donc D' et (AC) sont sécantes.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection, on remplace les valeurs obtenues dans le système d'équations paramétriques de D'.

Les coordonnées de ce point sont $(1\,;2\,;3)$.

D' et (AC) sont sécantes en C.