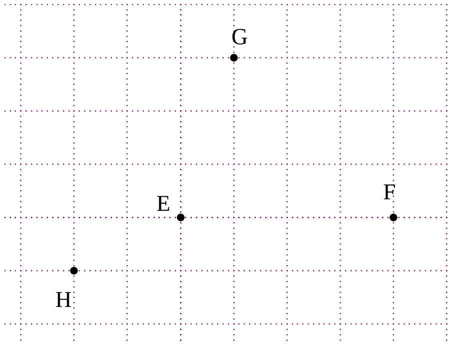
1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 15 mars 2016 (50 minutes)

Prénom : ………………………………..…. **Nom :** ……………………………...…. **Note : …. / 20**

I. (2 points : 1 point + 1 point)



On considère les points E, F, G, H sur le quadrillage ci-contre.
L'unité de longueur est le carreau.

Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$ et $p_2 = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FE}$ en utilisant des projetés orthogonaux (<u>aucune autre méthode ne sera prise en compte</u>).

Pour chaque produit scalaire, il est demandé de définir clairement le projeté orthogonal d'un point (autrement dit, il faut « créer » des points ; on donnera les noms que l'on veut).

Construire sur la figure ci-contre les projetés orthogonaux en marquant le codage des angles droits.

1$^{\text{ère}}$ ligne : écrire un produit scalaire en utilisant le projeté orthogonal que l'on vient d'introduire (respecter l'ordre)

2$^{\text{e}}$ ligne : écrire une expression littérale utilisant des distances en justifiant à côté du calcul

3$^{\text{e}}$ ligne : remplacer les distances présentes à la ligne précédent par leurs valeurs

4$^{\text{e}}$ ligne : écrire le résultat final

• Calcul de p_1 :

Soit ….. le projeté orthogonal du point ….. sur la droite ……….. .

$p_1 =$ ....

$=$ .... car ……………………………………………………………………………………..

$=$ ....

$=$ ....

• Calcul de p_2 :

Soit ….. le projeté orthogonal du point ….. sur la droite ……….. .

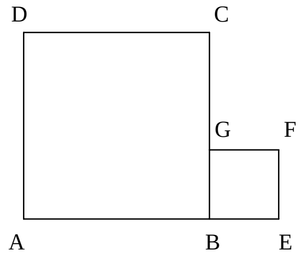
$p_2 =$ ....

$=$ .... car ……………………………………………………………………………………..

$=$ ....

$=$ ....

II. (5 points : 1 point par produit scalaire)



On considère la figure ci-contre où ABCD est un carré de côté a et BEFG est un carré de côté b, a et b étant deux réels strictement positifs tels que $a > b$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.
En utilisant la méthode de projection orthogonale, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a et b :

$p_1 = \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GC}$; $p_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF}$; $p_3 = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC}$; $p_4 = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}$; $p_5 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

$p_1 =$	$p_2 =$	$p_3 =$	$p_4 =$	$p_5 =$ ....

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Un client appelle à neuf reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de $\frac{3}{4}$.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'appels du client sans attente.

1°) Compléter la phrase en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi …..………………………………………………………………………………………………..………

………..

2°) Calculer la probabilité de l'événement A : « Le client a subi exactement cinq attentes ».

Présenter les calculs. Donner le résultat sous la forme $\frac{a}{4^9}$ où a est un entier naturel.

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Chaque jour, Alice et Bernard tirent au sort pour savoir qui va faire la vaisselle. Pour cela, ils utilisent une pièce. Si le résultat est « Pile », Alice fait la vaisselle ; sinon c'est Bernard qui fait la vaisselle. Alice a fourni la pièce en question : celle-ci a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur « Face ».

On s'intéresse à la répartition des tours de vaisselle durant deux semaines (c'est-à-dire quatorze jours consécutifs).
On utilisera la calculatrice pour effectuer les calculs et on donnera les valeurs arrondies au millième des probabilités.

1°) Calculer la probabilité que ce soit la même personne qui ait fait la vaisselle durant ces deux semaines.

……………… (un seul résultat, sans égalité)

2°) Calculer la probabilité qu'il y ait eu une juste répartition des tâches durant les deux semaines.

……………… (un seul résultat, sans égalité)

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Une urne contient 5 boules blanches et a boules noires (a est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire successivement avec remise 10 boules de l'urne et examine leurs couleurs.
On note X le nombre de boules blanches tirées.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision. On donnera l'un des paramètres en fonction de a.

X suit la loi ………………………………………………………………………………………… ……………

……

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X en fonction de a sous forme simplifiée.

$\text{E}(\text{X}) =$……………..… $\text{V}(\text{X}) =$……………..…

3°) Dans cette question, on prend $a = 2$.
Pour chaque calcul, on utilisera la calculatrice et on donnera directement la valeur arrondie au millième du résultat sans expliquer (un seul résultat sans égalité).

Calculer la probabilité d'obtenir :

a) exactement 6 fois une boule blanche   b) au moins 6 fois une boule blanche.

a) ………………………….   b) ………………………….

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère l'algorithme ci-dessous.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir n (entier naturel)

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  u prend la valeur $2i-1$
  S prend la valeur $S+u$
FinPour

Sortie :
Afficher S

1°) Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n=5$ en entrée.
Donner la valeur de S affichée en sortie.
On pourra utiliser au brouillon un tableau d'évolutions des variables.

…………… (une seule réponse, sans égalité)

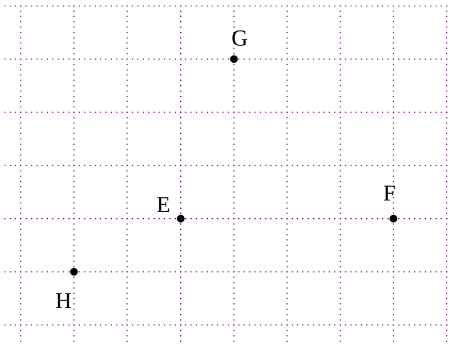
2°) Faire tourner l'algorithme « à la main » pour d'autres valeurs de n en entrée et conjecturer la « valeur » de la variable S affichée en sortie en fonction de la valeur de n saisie en entrée.
On ne demande pas de démontrer la formule.

…………… (une seule expression sans égalité)

Corrigé du contrôle du 15-3-2016

I.

On considère les points E, F, G, H sur le quadrillage ci-contre.
L'unité de longueur est le carreau.



Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EG}}$ et $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{EH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ en utilisant des projetés orthogonaux (<u>aucune autre méthode ne sera prise en compte</u>).
Pour chaque produit scalaire, il est demandé de définir clairement le projeté orthogonal d'un point (autrement dit, il faut « créer » des points ; on donnera les noms que l'on veut).

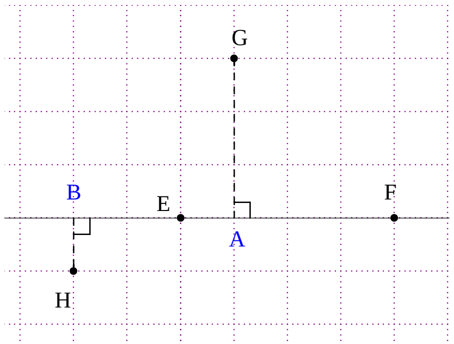
Construire sur la figure ci-contre les projetés orthogonaux en marquant le codage des angles droits.

1ère ligne : écrire un produit scalaire en utilisant le projeté orthogonal que l'on vient d'introduire (respecter l'ordre)

2e ligne : écrire une expression littérale utilisant des distances en justifiant à côté du calcul

3e ligne : remplacer les distances présentes à la ligne précédent par leurs valeurs

4e ligne : écrire le résultat final



• Calcul de p_1 :

Soit A le projeté orthogonal du point G sur la droite (EF).

$p_1 = \overrightarrow{\mathrm{EA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}}$

$= \mathrm{EA} \times \mathrm{EF}$ car les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ sont colinéaires de même sens

$= 4 \times 1$

$= 4$

• Calcul de p_2 :

Soit B le projeté orthogonal du point H sur la droite (EF).

$p_2 = \overrightarrow{\mathrm{BE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}}$

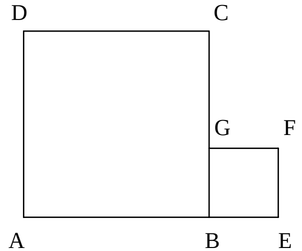
$= \mathrm{BE} \times \mathrm{EF}$ car les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ sont colinéaires de même sens

$= 2 \times 4$

$= 8$

II.

On considère la figure ci-contre où ABCD est un carré de côté a et BEFG est un carré de côté b, a et b étant deux réels strictement positifs tels que $a > b$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.
En utilisant la méthode de projection orthogonale, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a et b :
$p_1 = \overrightarrow{\mathrm{GE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GC}}$; $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BF}}$; $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$; $p_4 = \overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}}$; $p_5 = \overrightarrow{\mathrm{BD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}$.



$p_1 = b^2 - ab$	$p_2 = ab$	$p_3 = -a^2$	$p_4 = (a+b)^2$	$p_5 = -a^2$
$p_1 = \overrightarrow{\mathrm{GB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GC}}$ $= -\mathrm{GB} \times \mathrm{GC}$ $= -b \times (a-b)$ $= b^2 - ab$	$p_2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ $= \mathrm{AB} \times \mathrm{BE}$ $= ab$	$p_3 = \overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ $= -\mathrm{CB} \times \mathrm{BC}$ $= -a \times a$ $= -a^2$	$p_4 = \overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ $= \overrightarrow{\mathrm{AE}}^2$ $= \mathrm{AE}^2$ $= (a+b)^2$	$p_5 = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ $= -\mathrm{CD} \times \mathrm{DC}$ $= -a \times a$ $= -a^2$

III.

Un client appelle à neuf reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de $\dfrac{3}{4}$.
On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'appels du client sans attente.

1°) Compléter la phrase en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = \dfrac{3}{4}$.

2°) Calculer la probabilité de l'événement A : « Le client a subi exactement cinq attentes ».
Présenter les calculs. Donner le résultat sous la forme $\dfrac{a}{4^9}$ où a est un entier naturel.

Le client a subi exactement cinq attentes si et seulement si il a eu quatre appels sans attente.

$$P(\text{A})=P(\text{X}=4)$$

$$=\binom{9}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$=126\times\frac{3^4}{4^4}\times\frac{1}{4^5}$$

$$=\frac{10206}{4^9}$$

IV.

Chaque jour, Alice et Bernard tirent au sort pour savoir qui va faire la vaisselle. Pour cela, ils utilisent une pièce. Si le résultat est « Pile », Alice fait la vaisselle ; sinon c'est Bernard qui fait la vaisselle. Alice a fourni la pièce en question : celle-ci a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur « Face ».

On s'intéresse à la répartition des tours de vaisselle durant deux semaines (c'est-à-dire quatorze jours consécutifs).
On utilisera la calculatrice pour effectuer les calculs et on donnera les valeurs arrondies au millième des probabilités.

1°) Calculer la probabilité que ce soit la même personne qui ait fait la vaisselle durant ces deux semaines.

0,003 (un seul résultat, sans égalité)

La valeur exacte de la probabilité est $\left(\frac{2}{3}\right)^{14}+\left(\frac{1}{3}\right)^{14}=\frac{2^{14}+1}{3^{14}}$.

2°) Calculer la probabilité qu'il y ait eu une juste répartition des tâches durant les deux semaines.

0,092 (un seul résultat, sans égalité)

Il s'agit du résultat de $\binom{14}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^7\times\left(\frac{1}{3}\right)^7$.

On peut aussi utiliser directement la calculatrice : $\text{binomFdp}(14, 2/3, 7)$.

V.

Une urne contient 5 boules blanches et a boules noires (a est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire successivement avec remise 10 boules de l'urne et examine leurs couleurs.
On note X le nombre de boules blanches tirées.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision. On donnera l'un des paramètres en fonction de a.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{5}{5+a}$.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X en fonction de a sous forme simplifiée.

$$\text{E}(\text{X})=\frac{50}{5+a} \qquad \text{V}(\text{X})=\frac{50a}{(5+a)^2}$$

On applique les formules du cours donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.

3°) Dans cette question, on prend $a=2$.
Pour chaque calcul, on utilisera la calculatrice et on donnera directement la valeur arrondie au millième du résultat sans expliquer (un seul résultat sans égalité).

Calculer la probabilité d'obtenir :

a) exactement 6 fois une boule blanche b) au moins 6 fois une boule blanche.

a) 0,186 b) 0,873

X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{5}{7}$.

$P(\text{« obtenir exactement 6 fois une boule blanche »})=P(\text{X}=6)$

On utilise ensuite la calculatrice.

$P(\text{« obtenir au moins 6 fois une boule blanche »})=P(\text{X}\geqslant 6)$

$$=1-P(\text{X}\leqslant 5)$$

On utilise ensuite la calculatrice.

VI.

On considère l'algorithme ci-dessous.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

```
Entrée :
Saisir n (entier naturel)

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n Faire
    u prend la valeur 2i − 1
    S prend la valeur S + u
FinPour

Sortie :
Afficher S
```

1°) Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n = 5$ en entrée.
Donner la valeur de S affichée en sortie.
On pourra utiliser au brouillon un tableau d'évolutions des variables.

25 (une seule réponse, sans égalité)

2°) Faire tourner l'algorithme « à la main » pour d'autres valeurs de n en entrée et conjecturer la « valeur » de la variable S affichée en sortie en fonction de la valeur de n saisie en entrée.
On ne demande pas de démontrer la formule.

n^2 (une seule expression sans égalité)

Pour $n = 1$ en entrée, on trouve 1 en sortie.

Pour $n = 2$ en entrée, on trouve 4 en sortie.

Pour $n = 3$ en entrée, on trouve 9 en sortie.

Pour $n = 4$ en entrée, on trouve 16 en sortie.

Pour $n = 5$ en entrée, on trouve 25 en sortie.

On peut facilement conjecturer un lien entre le nombre n en entrée et le résultat de S en sortie. Il semble que le résultat en sortie soit le carré du nombre en entrée.