TS1

Contrôle du mardi 8 mars 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Pour tout nombre complexe z distinct de 0 et de 2i, on pose $Z=\dfrac{\mathrm{i}z}{z-2\mathrm{i}}$.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe 2i.

1°) Soit z un nombre complexe quelconque distinct de 0 et de 2i. On note M le point d'affixe z.
Compléter l'égalité suivante à l'aide de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)$ de vecteurs. Justifier ensuite sur les lignes ci-dessous.

$\arg Z=$ ………………………………………… $[2\pi]$

………

………

………

………

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P, distincts de O et de A, d'affixe z, tels que $\arg Z=0\quad[2\pi]$.

Soit M un point de P distinct de O et de A, d'affixe z $\left(z\neq 0 \text{ et } z\neq 2\mathrm{i}\right)$.

Compléter les équivalences suivantes à l'aide de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)$.

$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow \arg Z=0\quad[2\pi]$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Compléter la phrase suivante (sans employer le mot « ensemble » ni parler du point M).

E est ……………………………………………………………………………………………………

II. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $Z=-\dfrac{1}{z^2}$.

1°) On pose $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r et θ sont des réels avec $r>0$.
Donner une écriture exponentielle de Z en expliquant toute la démarche.

………

………

………

………

………

………

………

2°) On reprend les notations de la question précédente. Déterminer les réels θ tels que $\arg Z=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

………

………

………

………

………

………

3°) Compléter la phrase :

Lorsque z décrit l'ensemble des imaginaires purs privé de 0, Z décrit ………… .

III. (3 points)

Démontrer que pour tout réel θ on a : $\dfrac{1+e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = \overline{1+e^{i\theta}}$.

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ à l'aide du changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$.

………

………

………

………

………

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

………

………

………

………

V. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|e^{2x}-1\right|$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Calculer $f'(x)$.

………

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que la fonction F : $x \mapsto \dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$. On attend 4 étapes de calculs.

………

………

………

………

2°) Pour tout réel m non nul, on considère la fonction $g_m : x \mapsto \dfrac{x-m}{x}e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On note Γ_m sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Calculer $g_m'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

………

b) Soit m un réel non nul et différent de 1.

Compléter la phrase :

Γ_m admet une tangente horizontale au point d'abscisse ……………. .

Corrigé du contrôle du 8-3-2016

I.

Pour tout nombre complexe z distinct de 0 et de 2i, on pose $Z=\dfrac{\mathrm{i}z}{z-2\mathrm{i}}$.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe 2i.

1°) Soit z un nombre complexe quelconque distinct de 0 et de 2i. On note M le point d'affixe z.
Compléter l'égalité suivante à l'aide de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)$ de vecteurs. Justifier ensuite sur les lignes ci-dessous.

$$\arg Z=\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)\quad [2\pi]$$

$$\begin{aligned}
\arg Z &= \arg\frac{\mathrm{i}z}{z-2\mathrm{i}}\\
&= \arg\left(\mathrm{i}\times\frac{z}{z-2\mathrm{i}}\right)\\
&= \arg \mathrm{i}+\arg\frac{z-0}{z-2\mathrm{i}}\\
&= \frac{\pi}{2}+\arg\frac{z-z_{\mathrm{O}}}{z-z_{\mathrm{A}}}\\
&= \frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)
\end{aligned}$$

Cette question n'a pas été réussie ; beaucoup d'élèves n'ont pas vu qu'il fallait écrire : $Z=\mathrm{i}\times\dfrac{z}{z-2\mathrm{i}}$.

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P, distincts de O et de A, d'affixe z, tels que $\arg Z=0\quad[2\pi]$.

Soit M un point de P distinct de O et de A, d'affixe z $\left(z\neq 0 \text{ et } z\neq 2\mathrm{i}\right)$.

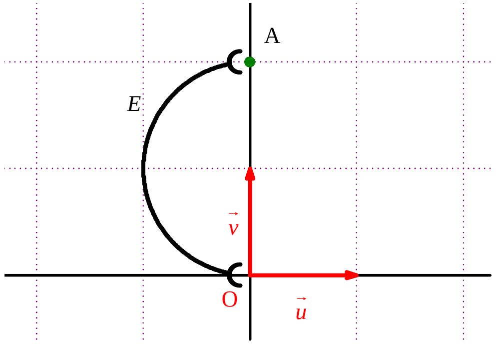
Compléter les équivalences suivantes à l'aide de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in E &\Leftrightarrow \arg Z=0\quad[2\pi]\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)=0\quad[2\pi]\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]
\end{aligned}$$

Compléter la phrase suivante (sans employer le mot « ensemble » ni parler du point M).

E est le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{AO}]$ situé à gauche de (AO) privé de A et de O.

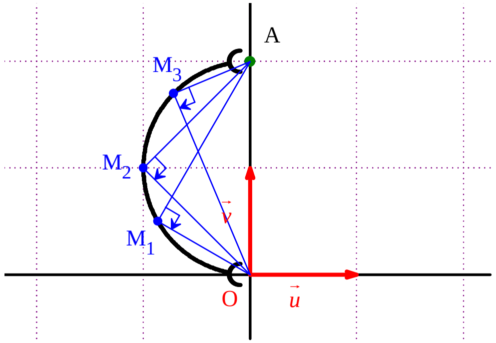
Pour répondre à cette question, on est obligé de faire un graphique.

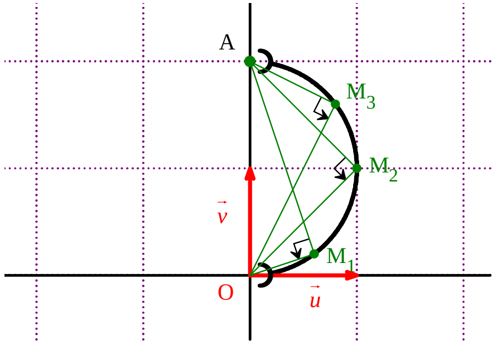


On sait que l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\, \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ est un demi-cercle de diamètre $[\mathrm{AO}]$ privé de A et O.
Comme il y a deux demi-cercles de diamètre $[\mathrm{AO}]$, il faut préciser lequel.

Pour cela on fait un graphique.

En pratique, pour trancher rapidement entre les deux demi-cercles, on utilise un « point test » en prenant par exemple, le milieu de l'un des demi-cercles.





• En choisissant des points M_1, M_2, M_3… sur le demi-cercle de diamètre $[AO]$ situé à gauche de l'axe des ordonnées, on constate que les angles orientés $\left(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1O}\right)$, $\left(\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2O}\right)$, $\left(\overrightarrow{M_3A}, \overrightarrow{M_3O}\right)$ sont des angles droits (ce que l'on savait déjà : il s'agit d'une propriété valable pour tout point M du cercle de diamètre $[AO]$ distinct de A et O) indirects c'est-à-dire dont une mesure en radians est $-\dfrac{\pi}{2}$.

• En choisissant des points N_1, N_2, N_3… sur le demi-cercle de diamètre $[AO]$ situé à droite de l'axe des ordonnées, on constate que les angles orientés $\left(\overrightarrow{N_1A}, \overrightarrow{N_1O}\right)$, $\left(\overrightarrow{N_2A}, \overrightarrow{N_2O}\right)$, $\left(\overrightarrow{N_3A}, \overrightarrow{N_3O}\right)$ sont des angles droits directs c'est-à-dire dont une mesure en radians est $\dfrac{\pi}{2}$.

II.

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $Z = -\dfrac{1}{z^2}$.

1°) On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r et θ sont des réels avec $r > 0$.
Donner une écriture exponentielle de Z en expliquant toute la démarche.

$$Z = -\frac{1}{\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}$$

$$= (-1)\times\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$$

$$= \frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-2\theta)}$$

$\dfrac{1}{r^2} > 0$ donc nous avons bien une écriture exponentielle de Z.

2°) On reprend les notations de la question précédente. Déterminer les réels θ tels que $\arg Z = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

On cherche les réels θ tels que $\arg Z = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]\quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \pi - 2\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ [il faut absolument repasser à des « $2k\pi$ » et ne pas rester en modulo 2π]

$\Leftrightarrow -2\theta = -\pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow -2\theta = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} - k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Les réels cherchés sont les réels de la forme $\theta = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

3°) Compléter la phrase :

Lorsque z décrit l'ensemble des imaginaires purs privé de 0, Z décrit $\mathbb{R}_+^*$.

Soit z un nombre imaginaire pur non nul.

Posons $z = \mathrm{i}y$ avec $y\in\mathbb{R}^*$.

On a : $Z = \dfrac{1}{y^2}$ donc Z est un réel strictement positif.

On dresse le tableau de variations de la fonction $f : y \mapsto \dfrac{1}{y^2}$ avec les limites aux bornes.

On obtient ce tableau à partir du tableau de variations de la fonction « carré » qui est connu.
On sait d'après une règle du cours de 1ère que les variations de f sont contraires à celles de f sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

y	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Ce tableau nous permet de voir que l'image de $\mathbb{R}^*$ par *f* est $\mathbb{R}_+^*$.

Donc lorsque *y* décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{y^2}$ décrit $\mathbb{R}_+^*$ d'où le résultat.

III.

Démontrer que pour tout réel θ on a : $\dfrac{1+e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = \overline{1+e^{i\theta}}$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \frac{1+e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} + \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}}$$

$$= e^{-i\theta} + 1$$

$$= 1 + e^{-i\theta}$$

$$= 1 + \overline{e^{i\theta}}$$

$$= \overline{1+e^{i\theta}}$$

IV.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ à l'aide du changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.

On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$.

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to 0^+)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{1}{X}\left(e^X - 1\right) = \frac{e^X - 1}{X}$$

$\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\left(1+e^x\right)}_{X} = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|e^{2x} - 1\right|$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} \qquad \text{(formule de dérivation } \left(\ln|u|\right)' = \frac{u'}{u}\text{).}$$

VI.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que la fonction F : $x \mapsto \dfrac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}^*$. On attend 4 étapes de calculs.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F'(x) = \frac{x-(x-1)}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} - \frac{x-1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x-1}{x^3}\right) \times e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x-x+1}{x^3} \times e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x^3} \times e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$= f(x)$$

Donc F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Pour tout réel *m* non nul, on considère la fonction $g_m : x \mapsto \dfrac{x-m}{x} e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On note Γ_m sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Calculer $g_m'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

On commence par calculer la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{x-m}{x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad u'(x) = \frac{1 \times x - (x-m) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{m}{x^2}$$

On peut éventuellement calculer à part la dérivée de la fonction $v : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

On peut alors passer au calcul de la dérivée de g_m.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g_m'(x) = \frac{m}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{x-m}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \frac{m}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{x-m}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{mx - x + m}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(m-1)x + m}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

b) Soit m un réel non nul et différent de 1.

Compléter la phrase :

Γ_m admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{m}{1-m}$.

On résout l'équation $g_m'(x) = 0 \ (1)$ dans $\mathbb{R}^*$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(m-1)x + m}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(m-1)x + m\right] \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$$

$\Leftrightarrow (m-1)x + m = 0$ (car une exponentielle est toujours non nulle)

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{m}{m-1}$ (possible car $m - 1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{m}{1-m}$$

Comme $m \neq 0$ par hypothèse, $\dfrac{m}{1-m} \neq 0$.