TS1

Contrôle du lundi 15 février 2016 (4 heures)

Partie commune (3 heures)

Le barème est donné sur 40

I. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points + 1 point)

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant. Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts. Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 € avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici. De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 € avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 € avec des probabilités non précisées ici. Aucune rédaction n'est demandée dans cet exercice.

1°) Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 € sachant qu'il est rouge.

2°) Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 € (valeur décimale exacte).

3°) Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €. Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
Déterminer à l'aide de la loi binomiale l'intervalle de fluctuation de la fréquence de clients ayant reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 € au seuil de 95 %.
Les doutes du directeur sont-ils justifiés ? On répondra en utilisant l'intervalle de fluctuation déterminé précédemment.

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points + 1 point ; 5°) 1 point)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la suite $\left(\mathrm{M}_n\right)$ des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(-1)^n \pi}{6}}$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique. Aucun détail des calculs n'est attendu.

2°) En interprétant géométriquement la forme exponentielle de z_n, placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur le graphique donné sur la feuille annexe ; tracer les segments $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$, $[\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3]$, $[\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4]$.

3°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $z_n = 2^n \times \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{(-1)^n}{2}\right]$.

4°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $z_{n+1} - z_n = 2^{n-1} \times \sqrt{3}\left[1 + (-1)^{n+1}\mathrm{i}\sqrt{3}\right]$.
En déduire que l'on a : $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5°) On pose $L_n = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3 + ... + \mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Déterminer une expression simplifiée de L_n en fonction de n. On donnera le résultat sans justifier.

III. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 3 points ; c) 2 points ; d) 1 point)

1°) Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 3 - \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Aucun tableau de variations n'est demandé.

2°) On considère la suite réelle $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3 - \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier naturel n.

a) On considère l'algorithme ci-contre.

Que permet de calculer cet algorithme ?
On répondra de manière précise par une phrase.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 2

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  u prend la valeur $3 - \mathrm{e}^{-u}$
FinPour

Sortie :
Afficher u

b) Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement croissante.
On effectuera une démonstration par récurrence en considérant la phrase $P(n)$: « $u_n < u_{n+1}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n < 3$.
Il est demandé d'effectuer un raisonnement « direct », autrement dit, de ne pas faire une récurrence.
d) Que peut-on déduire des questions b) et c) sur le comportement asymptotique de la suite $\left(u_n\right)$?
On répondra en une ou deux phrases.

IV. (9 points)

Cet exercice est un QCM composé de 9 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln x \times \left(\mathrm{e}^x - 2\right) > 0$ est :

a. $]-\infty\,;\ln 2[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ b. $]0\,;\ln 2[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ c. $]\ln 2\,;1[$

2°) Pour tout réel x, l'expression $\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$ est égale à :

a. $\ln x$ b. $-x$ c. x

3°) Pour tout réel $x > 0$, l'expression $6\ln\sqrt{x} - \ln\dfrac{x^3}{3}$ est égale à :

a. $\ln 3$ b. $3\ln 3$ c. $-\ln 3$

4°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 \ln x = 9 \ln x$ est :

a. $S = \{1\,;3\,;-3\}$

b. $S = \{3\,;-3\}$

c. $S = \{1\,;3\}$

5°) Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln(2x+1) - \ln x$ tend vers :

a. $\ln 2$

b. 0

c. $+\infty$

6°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$ est donnée par :

a. $f'(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

b. $f'(x) = \dfrac{2+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

c. $f'(x) = \dfrac{1+2\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

7°) Lorsque x tend vers 0, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers :

a. $+\infty$

b. 0

c. 1

8°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$ est donnée par :

a. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}$

b. $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

c. $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

9°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^{x} - 6 = 0$ est :

a. $S = \{1\,;\ln 6\}$

b. $S = \{0\}$

c. $S = \{0\,;-\ln 6\}$

V. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x} - x^2 - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f''(x)$ et les variations de f'.

Calculer au brouillon les extremums éventuels (valeur exacte).
On complètera les variations avec les limites suivantes qu'il n'est pas demandé de justifier :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

2°) Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont l'une est 0. L'autre solution sera notée α.

3°) À l'aide de la question précédente, faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

On complètera les variations avec les limites suivantes qu'il n'est pas demandé de justifier :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4°) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha - \alpha^2$.

Prénom : ……………………………………..… **Nom :** ………………………………………………

I.

1°) ………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) ………………… (un seul résultat sans égalité)

3°) …………………………………………… (écrire l'intervalle de fluctuation sans égalité)

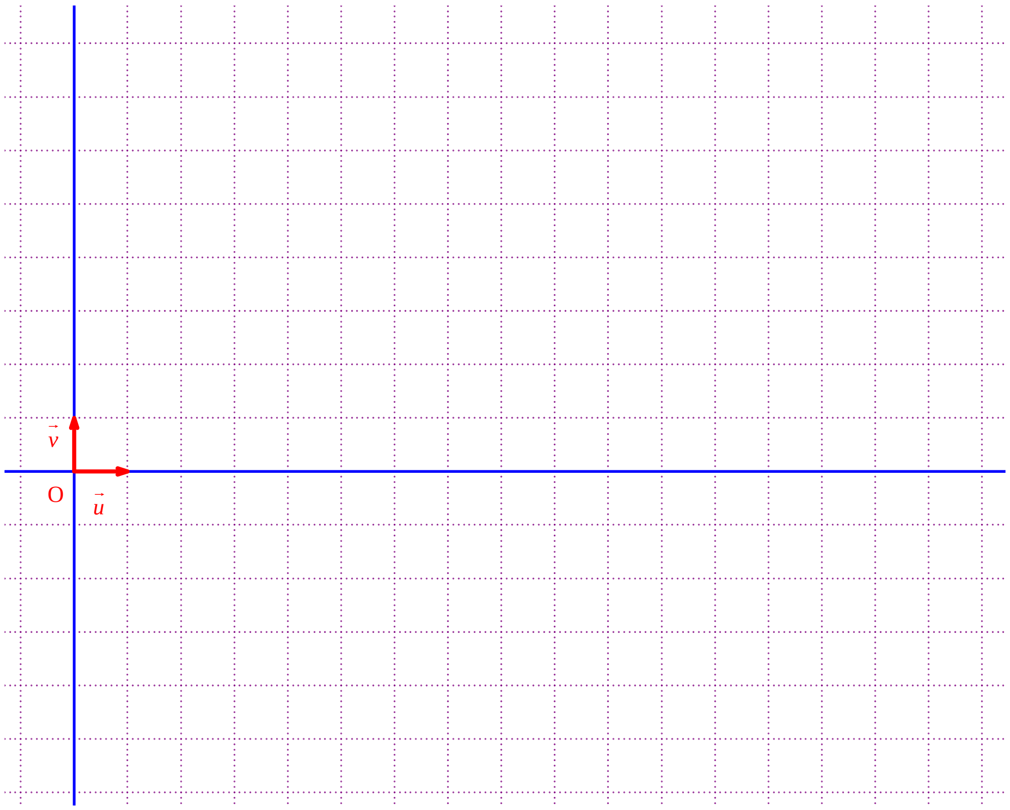
……..

……..

……..

II.

2°)



IV.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)	7°)	8°)	9°)
Réponse									

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Le barème est donné sur 20

Prénom : ……………………………….… **Nom :** ……………………………………………

I. (7 points : 1°) 4 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (a - x)e^{bx}$ définie sur $\mathbb{R}$ où a et b sont deux réels.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On précise que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $\text{A}(2\,;0)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

1°) Déterminer les réels a et b en détaillant la démarche.
2°) Pour les valeurs de a et b ainsi trouvées, former le tableau de variations de f. L'étude des limites n'est pas demandée.

II. (6 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Quelle est la nature de la suite (z_n) ? En déduire une expression de z_n en fonction de *n*.

2°) Déterminer la forme exponentielle de $1+\mathrm{i}$ et de z_0. On donnera les résultats sans justifier.

3°) Écrire z_n sous forme exponentielle.

III. (3 points)

Soit *z* un nombre complexe quelconque.
À laquelle des expressions suivantes la partie réelle de $-\mathrm{i}\bar{z}$ est-elle égale ?

Re *z* Im *z* − Im *z* − Re *z*

À laquelle des expressions suivantes la partie imaginaire de $-\mathrm{i}\bar{z}$ est-elle égale ?

Re *z* Im *z* − Im *z* − Re *z*

Entourer l'expression choisie puis faire la démonstration. On soignera tout particulièrement la rédaction.

IV. (4 points)

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée *k*. Ce dé a été pipé de telle sorte que $p_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier *k* tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.
On lance ce dé une fois.
On définit l'événement A : « le nombre obtenu est pair » ; B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 » ;
C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier avec précision.
Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier avec précision.

Prénom : …………………………………..… **Nom :** ……………………………………………

Contrôle du lundi 15 février 2016
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	Total/40	Total/20

………

………

………

………

………

………

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points + 1 point ; 5°) 1 point)

1°) ………

2°) sur le graphique

3°) ………

………

………

………

………

………

4°) ………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

5°) ……………………………………………………

III. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 3 points ; c) 2 points ; d) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) a) ……………………………………………………………………………………………

b) …………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

c) …………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

d) …………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Le barème est donné sur 20

Prénom : ……………………………………..… **Nom :** ………………………………………………

I. (6 points)

Déterminer en utilisant les congruences les restes de la division euclidienne de 2^{33} par 3 et 7.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère l'algorithme suivant rédigé en langage naturel.
Les variables n, i, j, c sont des entiers naturels avec $n \geqslant 1$.

```
Entrée :
Saisir n

Initialisation :
c prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n Faire
    Pour j allant de 1 à n Faire
        Si PGCD(i ; j) = 1
            Alors c prend la valeur c + 1
        FinSi
    FinPour
FinPour

Sortie :
Afficher c
```

1°) Que permet de calculer cet algorithme ? On répondra de manière précise par une phrase.

………..

………..

………..

………..

2°) Programmer cet algorithme sur calculatrice et indiquer la valeur de c affichée en sortie lorsque la valeur de n saisie en entrée est 100.

………………… (un seul résultat sans égalité)

III. (6 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 3 points)

Pour tout entier relatif *n*, on pose $u_n = n^2 - n + 1$.

1°) Soit *n* un entier relatif quelconque.

• Quelle est la parité du produit $n(n-1)$? Justifier par une phrase.

………

………

………

………

• En déduire la parité de u_n. Justifier par une phrase.

………

………

………

………

2°) a) Soit *n* un entier relatif quelconque. Calculer $(n+1)u_n - (n-1)u_{n+1}$.

………

………

………

………

………

b) Déterminer le PGCD de u_n et de u_{n+1} pour tout entier relatif *n*.
On rédigera le début de la démonstration selon le modèle suivant (à recopier) :
« Soit *d* un diviseur positif commun de u_n et de u_{n+1}. »

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère l'équation $213x + 4y = 249$ (E) d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1°) Compléter la phrase suivante puis écrire une ligne de calcul montrant que le couple donné est bien une solution particulière de (E).

Le couple (…………;…………) est un couple solution de (E).

………

2°) Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme (…………;…………) ………… ».

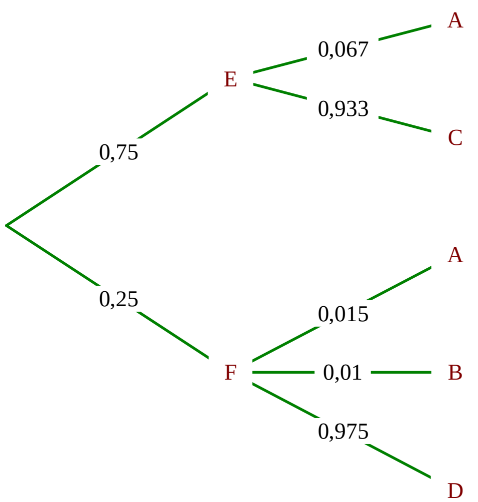
………

………

Corrigé du contrôle du 15-2-2016

I.

On peut alors représenter la situation par un arbre, en notant les événements :
E : « le bon d'achat est rouge »
F : « le bon d'achat est vert »
A : « le bon d'achat est de 30 € »
B : « le bon d'achat est de 100 € »
C : « le bon d'achat est d'une valeur comprise entre 0 et 15 € »
D : « le bon d'achat est d'une valeur comprise entre 10 et 20 € »



1°) On note S l'événement : « la valeur du bon d'achat est supérieure ou égale à 30 euros ».

La probabilité recherchée est la probabilité conditionnelle $P(\mathrm{S}/\mathrm{F}) = P(\mathrm{A}/\mathrm{F}) + P(\mathrm{B}/\mathrm{F}) = 0{,}025$.

La probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 € sachant qu'il est rouge est égale à 0,025.

2°)

Les événements E et F constituent un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{S}) &= P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{S/E}) + P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{S/F}) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}025 + 0{,}75 \times 0{,}067 \\ &= 0{,}0565 \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 € est égale à 0,0565.

Autre méthode :

Les événements E et F constituent un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{S}) &= P(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{F}) \\ &= P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{A/E}) + P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{A/F}) + P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{B/F}) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}010 + 0{,}75 \times 0{,}067 + 0{,}25 \times 0{,}015 \\ &= 0{,}0565 \end{aligned}$$

3°)

D'après la question précédente, la probabilité d'avoir un bon d'un montant supérieur ou égal à 30 euros est $p = 0{,}0565$.

On utilise la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}0565$.

Avec les notations du cours, on obtient : $a = 5$ et $b = 18$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est : $\left[\dfrac{5}{200} ; \dfrac{18}{200}\right]$ (les bornes sous forme décimale sont $\dfrac{5}{200} = 0{,}025$ et $\dfrac{18}{200} = 0{,}09$; il est préférable de les laisser sous forme fractionnaire).

Ici, la fréquence observée est $f = \dfrac{6}{200} (= 0{,}03)$.

On a $f \in \mathrm{I}$ et donc les doutes du directeur du magasin ne sont pas justifiés : avec un faible risque d'erreur (d'environ 5%), la fluctuation de *f* par rapport à celle de *p* annoncée s'explique simplement par le fait que l'échantillon des 200 billets de son magasin est constitué au hasard.

II.

1°)

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^1 \frac{\pi}{6}} \\ &= 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \sqrt{3} - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^2 \frac{\pi}{6}} \\ &= 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) \\ &= 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

2°) On a : $\mathrm{OA}_n = 2^n$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\right) = \dfrac{(-1)^n \pi}{6} \quad (2\pi)$.

Il ne faut pas passer par la forme algébrique (notamment il faut éviter de repasser par les résultats de la question 1°).

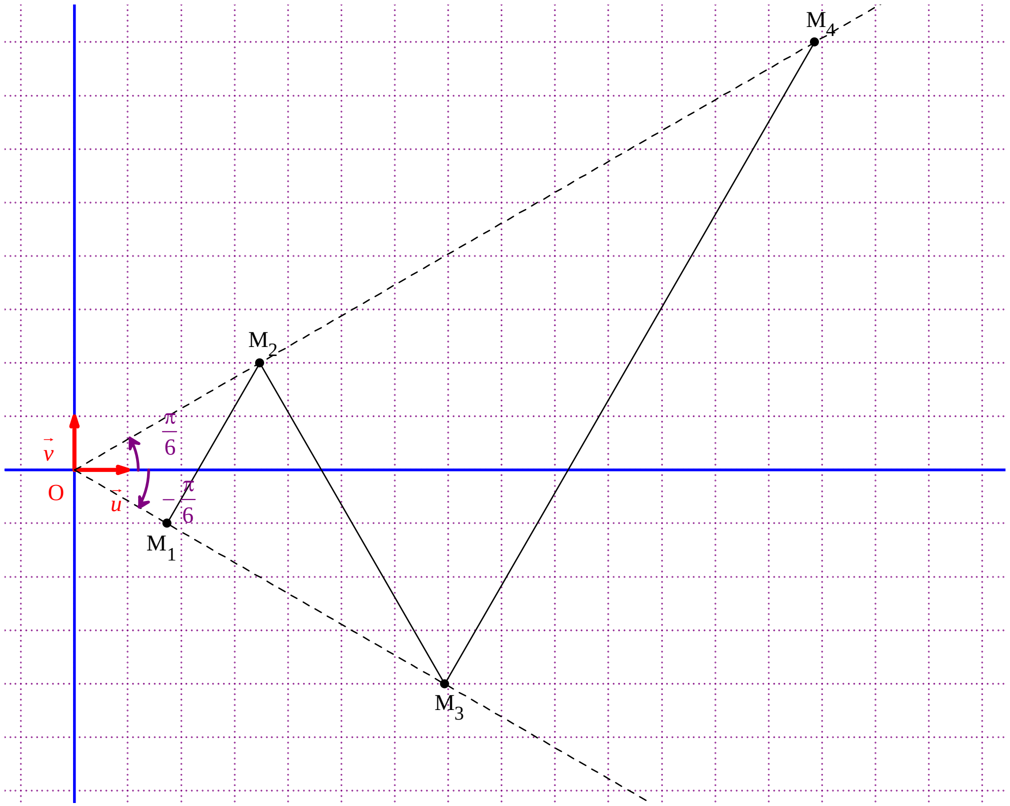
$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3\frac{\pi}{6}} = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_4 = 2^4 e^{i(-1)^4\frac{\pi}{6}} = 16e^{i\frac{\pi}{6}}$

Les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont situés sur deux demi-droites d'origine O qu'il est intéressant de tracer sur le graphique en pointillés.



3°) Démontrons que $\forall n \geqslant 1 \quad z_n = 2^n \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{(-1)^n}{2}\right]$.

$$z_n = 2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2^n\left[\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Or $\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = (-1)^n\sin\frac{\pi}{6} = \frac{(-1)^n}{2}$.

On peut éventuellement distinguer deux cas : *n* pair et *n* impair.

Donc $\forall n \geqslant 1 \quad z_n = 2^n \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{(-1)^n}{2}\right]$.

4°)

• Démontrons que $\forall n \geqslant 1 \ z_{n+1} - z_n = 2^{n-1} \times \sqrt{3}\left[1 + (-1)^{n+1} i\sqrt{3}\right]$.

$$z_{n+1} - z_n = 2^{n+1} \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{(-1)^{n+1}}{2}\right] - 2^n \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{(-1)^n}{2}\right]$$

$$= 2^n \times \frac{\sqrt{3}}{2}(2-1) + i \times 2^n \times \left[2 \times \frac{(-1)^{n+1}}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right]$$

$$= 2^n \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-1)^n \times \left(-1 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 2^n \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-1)^n \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= 2^n \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-1)^n \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= 2^n \times \frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 + i(-1)^{n+1} \times \sqrt{3}\right]$$

$$= 2^{n-1} \times \sqrt{3}\left[1 + i(-1)^{n+1} \times \sqrt{3}\right]$$

• Déduisons-en que $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

$$M_nM_{n+1} = |\, z_{n+1} - z_n \,|$$

$$= \left|\, 2^{n-1} \times \sqrt{3}\left[1 + i(-1)^{n+1} \times \sqrt{3}\right] \right|$$

$$= 2^{n-1} \times \sqrt{3} \times \left|\, 1 + i(-1)^{n+1} \times \sqrt{3} \,\right|$$

$$= 2^{n-1} \times \sqrt{3} \times \sqrt{1^2 + \left((-1)^{n+1} \times \sqrt{3}\right)^2}$$

$$= 2^{n-1} \times \sqrt{3} \times \sqrt{1+3}$$

$$= 2^{n-1} \times \sqrt{3} \times 2$$

$$= 2^n\sqrt{3}$$

On a donc $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5°) Déterminons une expression simplifiée de L_n en fonction de *n*.

$$L_n = M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_nM_{n+1}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + ... + 2^n\sqrt{3}$$

La suite $\left(2^n\sqrt{3}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2\sqrt{3}$.

On a donc $L_n = 2\sqrt{3} \times \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$.

On en déduit que $L_n = 2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right)$.

III.

1°) Étudions le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 3 - \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur la somme et composée de fonctions dérivables).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) a) L'algorithme affiche la valeur de u_n (terme de la suite d'indice *n*).

b) Il est important de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = f(u_n)$ (lien entre la suite (u_n) et la fonction *f*).ous allons nous en servir dans la démonstration par récurrence.

Démontrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la phrase $P(n)$: « $u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation :

On a : $u_1 = 3 - \mathrm{e}^{-2}$ et par suite, $u_0 < u_1$ (on peut par exemple utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de u_1).
On en déduit que la phrase $P(0)$ est vraie.

Hérédité :
Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire que l'on a $u_k < u_{k+1}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire que l'on a $u_{k+1} < u_{k+2}$.

On a démontré que la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc comme $u_k < u_{k+1}$, on a : $f(u_k) < f(u_{k+1})$ soit $u_{k+1} < u_{k+2}$.

La plupart des élèves n'ont pas utilisé la question 1°), ce qui me fait penser que je n'aurais pas dû la mettre. Ils ont procédé ainsi :

> Comme $P(k)$ est vraie, on a : $u_k < u_{k+1}$.
> Donc $-u_k > -u_{k+1}$.
> Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $\mathrm{e}^{-u_k} > \mathrm{e}^{-u_{k+1}}$.
> Par suite, $-\mathrm{e}^{-u_k} < -\mathrm{e}^{-u_{k+1}}$.
> D'où $3 - \mathrm{e}^{-u_k} < 3 - \mathrm{e}^{-u_{k+1}}$. On en déduit que $u_{k+1} < u_{k+2}$.

On a démontré par récurrence que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Démontrons que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n < 3$.

1ère méthode :

On a : $u_0 = 2$ par définition de la suite (u_n). Donc $u_0 < 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 3 - \mathrm{e}^{-u_{n-1}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{e}^{-u_{n-1}} > 0$ (car une exponentielle est strictement positive).

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3 - \mathrm{e}^{-u_{n-1}} < 3$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 3$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 3$.

2e méthode (faite par la plupart des élèves qui ont correctement traité la question) :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3 - \mathrm{e}^{-u_n}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} > 0$ (car une exponentielle est strictement positive).

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3 - \mathrm{e}^{-u_n} < 3$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < 3$.

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 3$.

d) On a démontré au b) que la suite (u_n) est croissante et au c) qu'elle est majorée par 3.
Or toute suite croissante et majorée converge.
On en déduit que la suite (u_n) converge vers une limite l telle que $l \leqslant 3$.

Remarque :

Comme la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$, l est solution de l'équation $f(x) = x$.
Cette équation ne peut être résolue de manière exacte, il n'est pas possible de déterminer la valeur exacte de l.
On peut néanmoins obtenir une valeur approchée de l avec la calculatrice.

IV.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)	7°)	8°)	9°)
Réponse	b	c	a	c	a	a	c	c	b

1°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln x \times \left(e^x - 2\right) > 0$ est $S = \left]0\,;\ln 2\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$.

L'ensemble de résolution de cette inéquation est $\mathbb{R}_+^*$.
On dresse un tableau de signes. Les valeurs charnières sont 1 et ln 2.
On a : $\ln 2 < 1$.

2°) Pour tout réel *x*, l'expression $\ln\left(e^x + 1\right) - \ln\left(1 + e^{-x}\right)$ est égale à *x*.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln\left(e^x+1\right) - \ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln\frac{e^x+1}{1+e^{-x}}$$

$$= \ln\frac{e^x+1}{1+\dfrac{1}{e^x}}$$

$$= \ln\left(e^x \times \frac{e^x+1}{e^x+1}\right)$$

$$= \ln\left(e^x \times 1\right)$$

$$= \ln e^x$$

$$= x$$

3°) Pour tout réel $x > 0$, l'expression $6\ln\sqrt{x} - \ln\dfrac{x^3}{3}$ est égale à ln 3.

$$\forall x > 0 \quad 6\ln\sqrt{x} - \ln\frac{x^3}{3} = 6 \times \frac{1}{2}\ln x - \ln\left(x^3\right) + \ln 3$$

$$= 3\ln x - 3\ln x + \ln 3$$

$$= \ln 3$$

4°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 \ln x = 9\ln x$ est $S = \left\{1\,;3\right\}$.

L'ensemble de résolution de l'équation $x^2 \ln x = 9\ln x \quad (1)$ est $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow x^2 \ln x - 9\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 9\right)\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$ ou $\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = 1$

La solution – 3 ne peut être retenue car elle n'est pas dans l'intervalle de résolution.

5°) Lorsque *x* tend vers + ∞, $\ln\left(2x+1\right) - \ln x$ tend vers ln 2.

$$\forall x > 0 \quad \ln\left(2x+1\right) - \ln x = \ln\frac{2x+1}{x}$$

$$= \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)}_{X} = 2 \\ \lim\limits_{X \to \ln 2} \ln X = \ln 2 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(2x+1\right) - \ln x = \ln 2.$$

6°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x + \ln\left(1 + e^{-x}\right)$ est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}}$$

7°) Lorsque x tend vers 0, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1.

Il s'agit d'une limite de référence du cours.

8°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$ est donnée par $f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

On applique la formule du cours :

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}$$

$$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

9°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{x}-6=0$ est $S=\{0\}$.

On pose $X=\mathrm{e}^x$. L'équation s'écrit $X^2+5X-6=0$.
Les racines sont 1 et – 6.
On doit donc résoudre les équations $\mathrm{e}^x=1 \ (1)$ et $\mathrm{e}^x=-6 \ (2)$.

L'équation (1) a pour solution 0.

L'équation (2) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car une exponentielle est toujours positive ou nulle.

V.

$f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x^2 - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=\mathrm{e}^x-2x-1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x)=\mathrm{e}^x-2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) Justifions que l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont l'une est 0.

On se place sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\ln 2]$ et $[\ln 2\,;+\infty[$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\ln 2]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln 2\,;+\infty[$.

Elle est également continue sur chacun de ces intervalles.

On a : $f'(\ln 2)=1-2\ln 2$ donc $f'(2)<0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$.

On applique le corollaire du TVI (dans sa version généralisée) sur chaque intervalle.

L'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution dans chaque intervalle.

Dans l'intervalle $]-\infty\,;\ln 2]$, on constate que $f'(0)=0$ donc la solution de l'équation $f'(x)=0$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\ln 2]$ est 0.

Dans l'intervalle $[\ln 2\,;+\infty[$, on note α la solution de l'équation $f'(x)=0$.

3°) Faisons un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On complète le tableau avec les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On peut vérifier les variations grâce à la calculatrice.

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	α	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$ ↘	0	$1-2\ln 2$	↗ 0	$+\infty$

4°) Démontrons que $f(\alpha)=\alpha-\alpha^2$.

On sait que α est solution de l'équation $f'(x)=0$.

On a donc $e^{\alpha}-2\alpha-1=0$ (on utilise l'expression de $f'(x)$ obtenue à la question 1°)).

Par suite, $e^{\alpha}=2\alpha+1$.

Or $f(\alpha)=e^{\alpha}-\alpha^2-\alpha-1$ d'où $f(\alpha)=2\alpha\cancel{+1}-\alpha^2-\alpha\cancel{-1}=\alpha-\alpha^2$.

Corrigé de la partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto (a-x)\mathrm{e}^{bx}$ définie sur $\mathbb{R}$ où a et b sont deux réels.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On précise que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $\mathrm{A}(2\,;0)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

1°) Déterminer les réels a et b en détaillant la démarche.
2°) Pour les valeurs de a et b ainsi trouvées, former le tableau de variations de *f*. L'étude des limites n'est pas demandée.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivabilité (sommes, produits, composées).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\mathrm{e}^{bx} + (a-x)b\mathrm{e}^{bx}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{bx}\left[-1 + b(a-x)\right]$$

On sait que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $\mathrm{A}(2\,;0)$ donc $f(2)=0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow (a-2)\mathrm{e}^{2b} = 0$$

$$\Leftrightarrow a-2=0 \text{ car } \mathrm{e}^{2b} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

On sait que $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 donc $f'(0)=0 \quad (2)$.

$$(2) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{b\times 0}\left[-1 + b(2-0)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

2°)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-\frac{x}{2}$		$+$	0	$-$	
Signe de $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de *f*		$\nearrow$	2	$\searrow$	

II.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Quelle est la nature de la suite (z_n) ? En déduire une expression de z_n en fonction de *n*.

(z_n) est une suite géométrique de raison $q = 1+\mathrm{i}$ et de premier terme $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})^n$$

2°) Déterminer la forme exponentielle de $1+\mathrm{i}$ et de z_0. On donnera les résultats sans justifier.

$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\qquad\qquad$ $z_0 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

3°) Écrire z_n sous forme exponentielle.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$= 2\left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

III.

Soit z un nombre complexe quelconque.
À laquelle des expressions suivantes la partie réelle de $-\mathrm{i}\bar{z}$ est-elle égale ?

Re z Im z $-$ Im z $-$ Re z

À laquelle des expressions suivantes la partie imaginaire de $-\mathrm{i}\bar{z}$ est-elle égale ?

Re z Im z $-$ Im z $-$ Re z

Entourer l'expression choisie puis faire la démonstration. On soignera tout particulièrement la rédaction.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\bar{z} &= -\mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) \\ &= -y - \mathrm{i}x \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\bar{z}\right) = -y$ et $\mathrm{Im}\left(-\mathrm{i}\bar{z}\right) = -x$.

IV.

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k. Ce dé a été pipé de telle sorte que $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.
On lance ce dé une fois.
On définit l'événement A : « le nombre obtenu est pair » ; B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 » ;
C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier avec précision.
Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier avec précision.

$$P(\mathrm{A}) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$P(\mathrm{B}) = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$P(\mathrm{C}) = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{10}{21}$ et $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) = \dfrac{24}{49}$

Or $24 \times 21 \neq 49 \times 10$.

Donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \neq P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$.

Par suite, les événements A et B ne sont pas indépendants.

$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{4}{21}$ et $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{C}) = \dfrac{12}{21} \times \dfrac{7}{21} = \dfrac{3 \times 4 \times 7}{7 \times 3 \times 21} = \dfrac{4}{21}$

Donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \neq P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{C})$.

Par suite, les événements A et C sont indépendants.

Corrigé de la partie spécialité mathématiques

I.

Déterminer en utilisant les congruences les restes de la division euclidienne de 2^{33} par 3 et 7.

• Déterminons en utilisant les congruences les restes de la division euclidienne de 2^{33} par 3.

On a : $2 \equiv -1$ (mod. 3).
Donc : $2^{33} \equiv (-1)^{33}$ (mod. 3) soit $2^{33} \equiv -1$ (mod. 3).
Or $-1 \equiv 2$ (mod. 3).
Donc $2^{33} \equiv 2$ (mod. 3).

Comme $0 \leqslant 2 < 3$, le reste cherché est 2.

• Déterminons en utilisant les congruences les restes de la division euclidienne de 2^{33} par 7.

On a : $2^3 \equiv 1$ (mod. 7).
Donc : $(2^3)^{11} \equiv 1^{11}$ (mod. 7) soit $2^{33} \equiv 1$ (mod. 7).
Comme $0 \leqslant 1 < 7$, le reste cherché est 1.

II.

On considère l'algorithme suivant rédigé en langage naturel.
Les variables *n*, *i*, *j*, *c* sont des entiers naturels avec $n \geqslant 1$.

```
Entrée :
Saisir n

Initialisation :
c prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n Faire
    Pour j allant de 1 à n Faire
        Si PGCD(i ; j) = 1
            Alors c prend la valeur c+1
        FinSi
    FinPour
FinPour

Sortie :
Afficher c
```

1°) Que permet de calculer cet algorithme ? On répondra de manière précise par une phrase.

Cet algorithme permet de calculer le nombre de couples d'entiers naturels non nuls, premiers entre eux, inférieurs ou égaux à l'entier naturel *n* saisi en entrée.

2°) Programmer cet algorithme sur calculatrice et indiquer la valeur de *c* affichée en sortie lorsque la valeur de *n* saisie en entrée est 100.

6087 (un seul résultat sans égalité)

Il faut faire tourner le programme un certain temps avant d'obtenir le résultat (environ 5 minutes).
Le résultat est très élevé et ne manque pas d'étonner.

III.

Pour tout entier relatif *n*, on pose $u_n = n^2 - n + 1$.

1°) Soit *n* un entier relatif quelconque.

• Quelle est la parité du produit $n(n-1)$? Justifier par une phrase.

n et $n-1$ sont deux entiers relatifs consécutifs.
L'un des deux un nombre pair. Or le produit d'un nombre pair par un entier quelconque est pair.
Donc le produit $n(n-1)$ est pair.

• En déduire la parité de u_n. Justifier par une phrase.

$u_n = n(n-1)+1$

Or $n(n-1)$ est pair donc u_n est impair pour tout entier relatif *n*.

2°) a) Soit *n* un entier relatif quelconque. Calculer $(n+1)u_n - (n-1)u_{n+1}$.

$$\begin{aligned}(n+1)u_n - (n-1)u_{n+1} &= (n+1)(n^2-n+1)-(n-1)(n^2+n+1)\\ &= n^3-n^2+n+n^2+1-n^3-n^2-n+n^2+n+1\\ &= 2\end{aligned}$$

b) Déterminer le PGCD de u_n et de u_{n+1} pour tout entier relatif *n*.
On rédigera le début de la démonstration selon le modèle suivant (à recopier) :
« Soit *d* un diviseur positif commun de u_n et de u_{n+1}. »

Soit *d* un diviseur positif commun de u_n et de u_{n+1}.

$d \mid u_n$ et $d \mid u_{n+1}$

Donc *d* divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de u_n et de u_{n+1}.

En particulier, comme $n+1$ et $n-1$ sont des entiers relatifs, $d \mid (n+1)u_n - (n-1)u_{n+1}$ soit $d \mid 2$.
Or les diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2. Par suite, $d = 1$ ou $d = 2$.

Or u_n est impair donc 2 ne divise pas u_n.

Donc $d=1$.

Or le PGCD de u_n et de u_{n+1} est égal à 1.

IV.

On considère l'équation $213x+4y=249$ (E) d'inconnue $(x, y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Compléter la phrase suivante puis écrire une ligne de calcul montrant que le couple donné est bien une solution particulière de (E).

Le couple $(1\,;9)$ est un couple solution de (E).

$213\times1+4\times9=249$

Le couple $(249\,;-1397)$ est un couple solution de (E).

$213\times249+4\times(-13197)=53037-52788=249$

Le couple $(5\,;-204)$ est un couple solution de (E).

$213\times5+4\times(-204)=249$

2°) Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(..........\,;..........)$ ………… ».

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(4k+1\,;9-213k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(249-4k\,;213k-13197)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.