1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 10 février 2016 (30 minutes)

Prénom : …………………………………… **Nom :** ……………………………… **Note : …. / 20**

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Il est demandé de ne pas introduire de notation.
On débutera sèchement les calculs avant de rédiger une phrase de conclusion.

1°) Les nombres $\pi - 3$, $2\pi - 6$ et $4\pi - 12$ sont-ils en progression géométrique (c'est-à-dire sont-ils dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique) ? Justifier (on fera les calculs d'abord avant de conclure).

……

……

……

……

……

……

2°) Même question avec les nombres $\sqrt{18}$, $-9\sqrt{2}$ et $16\sqrt{8} - \sqrt{50}$.

……

……

……

……

……

……

II. (1 point)

Les nombres 3, 1 et 0,333 sont-ils en progression géométrique ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

…………

III. (3 points)

On s'intéresse au cours d'une expérience à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre augmente de 20 % toutes les heures. À l'origine, la population est de 1200 bactéries.
Aucune justification n'est demandée.

1°) Calculer le nombre de bactéries au bout d'une heure.

……………………

2°) Calculer le nombre de bactéries au bout de deux heures.

……………………

3°) Calculer le nombre de bactéries au bout d'une journée (valeur arrondie à l'unité).

……………………

IV. (4 points)

Calculer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\dfrac{27\pi}{4}$. Détailler la démarche.

……

……

……

……

……

V. (4 points)

Soit x un réel quelconque.

Exprimer $\cos\left(-x-7\pi\right)$ et $\sin\left(x-15\pi\right)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

VI. (4 points)

Soit a le réel de l'intervalle $\left[\pi\,;2\pi\right]$ tel que $\cos a=-\frac{1}{4}$.

Calculer la valeur exacte de $\sin a$.

Corrigé du contrôle du 10-2-2016

I.

Il est demandé de ne pas introduire de notation.
On débutera sèchement les calculs avant de rédiger une phrase de conclusion.

1°) Les nombres $\pi-3$, $2\pi-6$ et $4\pi-12$ sont-ils en progression géométrique (c'est-à-dire sont-ils dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique) ? Justifier (on fera les calculs d'abord avant de conclure).

> La calculatrice fausse tous les résultats ! J'aurais dû l'interdire.

On utilise la méthode des quotients (test des quotients).

$$\frac{2\pi-6}{\pi-3}=\frac{2(\pi-3)}{\pi-3}=2$$

$$\frac{4\pi-12}{2\pi-6}=\frac{2(2\pi-6)}{2\pi-6}=2$$

Les résultats des quotients sont égaux donc les nombres $\pi-3$, $2\pi-6$ et $4\pi-12$ sont en progression géométrique (de raison 2).

Diane Schneider

« Le résultat des divisions est le même donc les *termes* $\pi-3$, $2\pi-6$ et $4\pi-12$ forment dans cet ordre une suite géométrique de raison $q=2$. »

On évite de parler de « termes ». On reprend le vocabulaire de « progression ».

Variante (autre méthode plus courte et donc mieux !) :

On observe que $2\pi-6=2\times(\pi-3)$ et que $4\pi-12=2\times(2\pi-6)$.
Autrement dit, on observe que l'on passe de chaque nombre au suivant en multipliant par 2.

2°) Même question avec les nombres $\sqrt{18}$, $-9\sqrt{2}$ et $16\sqrt{8}-\sqrt{50}$.

$$\frac{-9\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=-\frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=-3$$

$$\frac{16\sqrt{8}-\sqrt{50}}{-9\sqrt{2}}=\frac{16\times2\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{-9\sqrt{2}}=\frac{32\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{-9\sqrt{2}}=-\frac{27\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}=-3$$

Les résultats des quotients sont égaux donc les nombres $\sqrt{18}$, $-9\sqrt{2}$ et $16\sqrt{8}-\sqrt{50}$ sont en progression géométrique (de raison – 3).

Variante (autre méthode plus courte et donc mieux !) :

On commence par transformer le premier et le troisième nombre de manière à en obtenir une écriture « simplifiée ».

$\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$

$16\sqrt{8}-\sqrt{50}=16\times2\sqrt{2}-5\sqrt{2}=32\sqrt{2}-5\sqrt{2}=27\sqrt{2}$

On réécrit la liste des nombres sous forme simplifiée : $3\sqrt{2}$; $-9\sqrt{2}$; $27\sqrt{2}$.
On observe que l'on passe de chaque nombre au suivant en multipliant par – 3.
Donc les nombres $\sqrt{18}$, $-9\sqrt{2}$ et $16\sqrt{8}-\sqrt{50}$ sont en progression géométrique (de raison – 3).

II.

Les nombres 3, 1 et 0,333 sont-ils en progression géométrique ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

non

> Tous les élèves sauf un ont réussi cet exercice.

III.

On s'intéresse au cours d'une expérience à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre augmente de 20 % toutes les heures. À l'origine, la population est de 1200 bactéries.
Aucune justification n'est demandée.

1°) Calculer le nombre de bactéries au bout d'une heure.

1440

2°) Calculer le nombre de bactéries au bout de deux heures.

1728

3°) Calculer le nombre de bactéries au bout d'une journée (valeur arrondie à l'unité).

95396

Il y a deux démarches de résolution possibles.

1ère démarche :

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 20 % est égal à $1+\frac{20}{100}=1,2$.

● Pour calculer le nombre de bactéries au bout d'une heure, on effectue le calcul $1200\times1,2=1440$.

● Pour calculer le nombre de bactéries au bout de deux heures, on effectue le calcul $1440\times1,2=1728$.

• Pour calculer le nombre de bactéries au bout d'une journée c'est-à-dire au bout de 24 heures, on utilise la commande « Rép » de la calculatrice.

2^e^ démarche :

On introduit une suite. Autrement dit, on modélise la situation par une suite.
On note u_n le nombre de bactéries au bout de n heures.
Ainsi, $u_0 = 1200$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 1,2u_n$.
On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,2.

• Pour calculer le nombre de bactéries au bout d'une heure, on calcule $u_1 = u_0 \times 1,2 = 1200 \times 1,2 = 1440$.

• Pour calculer le nombre de bactéries au bout de deux heures, on calcule $u_2 = u_0 \times 1,2^2 = 1728$ (ou $u_2 = u_1 \times 1,2 = 1728$).

• Pour calculer le nombre de bactéries au bout d'une journée c'est-à-dire au bout de 24 heures, on calcule $u_{24} = u_0 \times 1,2^{24} = 1200 \times 1,2^{24}$. Avec la calculatrice, on obtient $u_{24} \approx 95396$ (valeur arrondie à l'unité).

On peut faire les deux démarches, l'une servant de validation pour l'autre.

IV.

Calculer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\dfrac{27\pi}{4}$. Détailler la démarche.

$$\cos\frac{27\pi}{4} = \cos\left(6\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{27\pi}{4} = \sin\left(6\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il est tout à fait inutile de parler de mesure principale (il n'est pas question d'angle orienté dans l'exercice).
En revanche, il est indispensable de faire apparaître la première étape avec le multiple entier de 2π (décomposition de $\dfrac{27\pi}{4}$ sous la forme $6\pi + \dfrac{3\pi}{4}$.

V.

Soit x un réel quelconque.

Exprimer $\cos(-x-7\pi)$ et $\sin(x-15\pi)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

$$\begin{aligned}\cos(-x-7\pi) &= \cos(-x-8\pi+\pi)\\ &= \cos(\pi - x)\\ &= -\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x-15\pi) &= \sin(x-16\pi+\pi)\\ &= \sin(\pi + x)\\ &= -\sin x\end{aligned}$$

VI.

Soit a le réel de l'intervalle $[\pi\,;2\pi]$ tel que $\cos a = -\dfrac{1}{4}$.
Calculer la valeur exacte de $\sin a$.

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.
D'où $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \sin^2 a = 1$ soit $\dfrac{1}{16} + \sin^2 a = 1$, ce qui donne $\sin^2 a = \dfrac{15}{16}$.
D'où $\sin a = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\sin a = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Or $a \in [\pi\,;2\pi]$. Donc $\sin a \leqslant 0$.

On en déduit que $\sin a = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.