TS1

Contrôle du mercredi 10 février 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

I. (4 points)

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie et dérivable sur un ensemble I.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f\,'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).

1°)	$f(x)=\ln\left(1+2\mathrm{e}^{-x}\right)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f\,'(x)=$ ………………………………………………
2°)	$f(x)=\ln\left\lvert x^2-1\right\rvert$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$	$f\,'(x)=$ ………………………………………………
3°)	$f(x)=\sqrt{3+\mathrm{e}^{2x}}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f\,'(x)=$ ………………………………………………
4°)	$f(x)=\mathrm{e}^{x-x^2}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f\,'(x)=$ ………………………………………………

II. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction F : $x \mapsto (1-3x)\mathrm{e}^{-x}+2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

………

………

………

………

………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ à l'aide du changement de variable $X=-3x$.

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ à l'aide du changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

1°) Compléter les pointillés dans les phrases suivantes :

• f est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions continues.

• f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

pour tout réel $y \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, il existe un unique réel $x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ tel que $f(x) = y$.

2°) Exprimer x en fonction de y dans la dernière phrase de la question précédente.

……………………………………

V. (1 point)

Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6}$. Aucune justification n'est attendue.

$z = \ldots\ldots\ldots\ldots$

VI. (3 points)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $z_1 = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^{2016}$; $z_2 = 1 - \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{5}$; $z_3 = \dfrac{\mathrm{i}}{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{2}}$.

$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$z_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

VII. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit θ un réel quelconque. On pose $z = \sin 2\theta + 2\mathrm{i}\sin^2\theta$.

1°) Démontrer que $z = 2\sin\theta \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2°) Déterminer une écriture exponentielle de $z - \mathrm{i}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 10-2-2016

I.

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie et dérivable sur un ensemble I.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).

1°)	$f(x)=\ln\left(1+2\mathrm{e}^{-x}\right)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\dfrac{2\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^{-x}}$
2°)	$f(x)=\ln\left\|x^2-1\right\|$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$	$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$
3°)	$f(x)=\sqrt{3+\mathrm{e}^{2x}}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{3+\mathrm{e}^{2x}}}$
4°)	$f(x)=\mathrm{e}^{x-x^2}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=(1-2x)\times\mathrm{e}^{x-x^2}$

Commentaire :

• Pour le calcul du 2°), on applique la formule de dérivation : $\left(\ln|u|\right)'=\dfrac{u'}{u}$. On fait comme s'il n'y avait pas la valeur absolue.

• On donne les résultats sous forme simplifiée (cf. 3°) où l'on simplifie les 2 au numérateur et au dénominateur).

• On attendait un calcul de ces dérivées « à la main ». Néanmoins, on peut utiliser l'application Symbolic sur calculatrice pour vérifier les résultats sauf pour le deuxième calcul.

Pour le 1°), Symbolic donne le résultat sous la forme suivante : $\dfrac{-2\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x}{1+2\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x}$.

On ne peut pas donner la réponse sous cette forme (trouvée néanmoins chez quelques élèves).

Pour le 2°), Symbolic ne permet pas d'obtenir la dérivée.

Pour le 3°) et le 4°), Symbolic marche mais il faut simplifier le résultat.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto (3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto (1-3x)\mathrm{e}^{-x}+2x$ est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

On écrit la première ligne de sorte que l'on ait la trace de la formule de dérivation utilisée.

On ne modifie pas l'expression initiale de F pour dériver (pas de quotient).

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}'(x)=-3\times\mathrm{e}^{-x}+(1-3x)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)+2$

$$=\mathrm{e}^{-x}(-3-1+3x)+2$$

$$=\mathrm{e}^{-x}(3x-4)+2$$

$$=f(x)$$

Donc F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

III.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ à l'aide du changement de variable $X=-3x$.

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

On pose $X=-3x \Leftrightarrow x=-\dfrac{X}{3}$.

$(x\to+\infty)\Leftrightarrow(X\to-\infty)$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=-\dfrac{X}{3}\mathrm{e}^{X}=-\dfrac{X\mathrm{e}^{X}}{3}$

$\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X\mathrm{e}^{X}\right)=0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ à l'aide du changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.

En 0^+, on rencontre une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$.

$(x \to 0^+) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{1}{X} \times \mathrm{e}^X = \dfrac{\mathrm{e}^X}{X}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.
On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖	↗	0
	‖ $-\infty$		

1°) Compléter les pointillés dans les phrases suivantes :

• f est continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$ comme composée de fonctions continues.

• f est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

pour tout réel $y \in \left]-\infty\,;0\right[$, il existe un unique réel $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ tel que $f(x) = y$.

2°) Exprimer x en fonction de y dans la dernière phrase de la question précédente.

$$x = -\ln\left(1 - \mathrm{e}^y\right)$$

On résout l'équation $f(x) = y$ (1) d'inconnue $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ avec $y \in \left]-\infty\,;0\right[$ fixé.

$(1) \Leftrightarrow \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) = y$

$\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^y$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^y$

$\Leftrightarrow -x = \ln\left(1 - \mathrm{e}^y\right)$ (possible car comme $y \in \left]-\infty\,;0\right[$, $1 - \mathrm{e}^y > 0$

$\Leftrightarrow x = -\ln\left(1 - \mathrm{e}^y\right)$

En fait, on vient de démontrer que la fonction f établit une bijection de $\left]0\,;+\infty\right[$ dans $\left]-\infty\,;0\right[$ et que la bijection réciproque de f est la fonction notée f^{-1} définie $\left]-\infty\,;0\right[$ à valeurs dans $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f^{-1}(y) = -\ln\left(1 - \mathrm{e}^y\right)$.

V.

Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6}$. Aucune justification n'est attendue.

$$z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

$z = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

On peut plus ou moins vérifier ce résultat sur la calculatrice.

VI.

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $z_1 = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^{2016}$; $z_2 = 1 - \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^5$; $z_3 = \dfrac{\mathrm{i}}{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2}$.

$z_1 = 1$	$z_2 = -15 + 16\mathrm{i}\sqrt{3}$	$z_3 = \dfrac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{8}$

$z_1=\left(e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^{2016}$

$=e^{-i\frac{2016\pi}{8}}$

$=e^{-i252\pi}$

$=1$

$z_2=1-2^5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$=1-32\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$=1-32\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-15+16i\sqrt{3}$

$z_3=\dfrac{i}{4e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$=\dfrac{ie^{-i\frac{\pi}{3}}}{4}$

$=\dfrac{i\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{4}$

$=\dfrac{i\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4}$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{i}{8}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+i}{8}$

On ne peut pas vérifier le premier calcul à la calculatrice.

On peut plus ou moins vérifier les résultats de z_2 et z_3.

VII.

Soit θ un réel quelconque. On pose $z=\sin 2\theta+2i\sin^2\theta$.

1°) Démontrer que $z=2\sin\theta\times e^{i\theta}$.

$z=\sin 2\theta+2i\sin^2\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta+2i\sin^2\theta$

$=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=2\sin\theta\times e^{i\theta}$

2°) Déterminer une écriture exponentielle de $z-i$.

Cette question est indépendante de la précédente. Elle question était plus difficile que la précédente.
On repart de la formule initiale qui définit z.

$z-i=\sin 2\theta+i\left(2\sin^2\theta-1\right)$

$=\sin 2\theta+i(-\cos 2\theta)$

$=\sin 2\theta-i\cos 2\theta$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$=\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]+i\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$ (formule $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$)

$=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

$=e^{i\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$