TS1

Contrôle du mardi 2 février 2016 (60 minutes)

Prénom : ………………………………..…… **Nom :** ……………………………...…… **Note : …. / 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

1°) Calculer $f\,'(x)$.

On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur simplifié.

On observera que l'on peut écrire $f(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x^2}$.

2°) Démontrer que la fonction F : $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est une primitive de f sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (2 points)

Calculer « à la main » les expressions $A = \dfrac{5e^{3\ln 2} - \left(e^{2\ln 2} - 1\right)^2}{2e^{\ln 3} - 5}$ et $B = 4\ln\sqrt{e} - 5\ln\left(e^{-3}\right) - \left(\ln\dfrac{1}{e}\right)^2$.

On attend le résultat sous la forme la plus simple possible.

Écrire les résultats puis donner le détail des calculs sur les lignes suivantes.

A = ……………………… ; B = ………………………

……

……

……

……

……

……

III. (1 point)

Donner sans justifier l'expression d'une primitive F de la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{3}{x}$ définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

$F(x) =$ ………………………

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - 3x)$ définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f\,'(x)$.

……………………………………………

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite d'équation $x + y - 1 = 0$.

On s'efforcera de rédiger le plus soigneusement possible.

……….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - x + 1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$ en détaillant toute la démarche.

……….

……….

……….

……….

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto (\ln x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de g en 0^+ en détaillant toute la démarche.

……….

……….

……….

……….

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto 1 - 2\dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de h en $+\infty$ en détaillant toute la démarche.

……….

……….

……….

……….

VI. (7 points)

Donner le domaine de résolution de chacune des équations et inéquations suivantes puis les résoudre.

1°) $\ln\dfrac{1}{x} - \ln x \geqslant 0 \quad (1)$

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_1 =$ ……………………

2°) $2\ln(x+1) \leqslant 1 \quad (2)$

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_2 =$ ……………………

3°) $\left(e^x - 2\right)(\ln x + 1) = 0 \quad (3)$

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_3 =$ ……………………

4°) $x^2 \ln x - 4\ln x = 0 \quad (4)$

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_4 =$ ……………………

5°) $\ln 6 + \ln\dfrac{x}{2} \leqslant \ln\left(x^2\right) \quad (5)$

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_5 =$ ……………………

6°) $\ln|\,x\,| - 1 = 0 \quad (6)$

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_6 =$ ……………………

7°) $|\,\ln x - 1\,| = 2 \quad (7)$

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_7 =$ ……………………

Corrigé du contrôle du 2-2-2016

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

1°) Calculer $f\,'(x)$.
On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur simplifié.

On observera que l'on peut écrire $f(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x^2}$.

2°) Démontrer que la fonction F : $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

1°)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f\,'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} + \ln x \times \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

2°)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathrm{F}'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x + 1) \times 1}{x^2}$$

$$= -\frac{\cancel{1} - \ln x - \cancel{1}}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.

Calculer « à la main » les expressions $\mathrm{A} = \dfrac{5\mathrm{e}^{3\ln 2} - \left(\mathrm{e}^{2\ln 2} - 1\right)^2}{2\mathrm{e}^{\ln 3} - 5}$ et $\mathrm{B} = 4\ln\sqrt{\mathrm{e}} - 5\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) - \left(\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$.

On attend le résultat sous la forme la plus simple possible.
Écrire les résultats puis donner le détail des calculs sur les lignes suivantes.

$\mathrm{A} = 31$; $\mathrm{B} = 16$

$$\mathrm{A} = \frac{5\mathrm{e}^{3\ln 2} - \left(\mathrm{e}^{2\ln 2} - 1\right)^2}{2\mathrm{e}^{\ln 3} - 5}$$

$$= \frac{5 \times 2^3 - \left(2^2 - 1\right)^2}{2 \times 3 - 5}$$

$$= \frac{40 - 9}{1}$$

$$= 31$$

$$\mathrm{B} = 4\ln\sqrt{\mathrm{e}} - 5\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) - \left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} - 5 \times (-3) - (-1)^2$$

$$= 2 + 15 - 1$$

$$= 16$$

III.

Donner sans justifier l'expression d'une primitive F de la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{3}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

$$\mathrm{F}(x) = x + 3\ln x$$

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - 3x)$ définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f\,'(x)$.

$f\,'(x) = -\dfrac{3}{1 - 3x}$ ou $f\,'(x) = \dfrac{3}{3x - 1}$ (en multipliant le numérateur et le dénominateur par - 1)

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite d'équation $x + y - 1 = 0$.
On s'efforcera de rédiger le plus soigneusement possible.

L'équation $x + y - 1 = 0$ peut s'écrire $y = 1 - x$.

La droite d'équation $x + y - 1 = 0$ a pour coefficient directeur – 1.

Or deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées dans le plan muni d'un repère sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

On cherche donc les réels $x \in \left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$ tels que $f\,'(x) = -1$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 3x - 1 = -3$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

L'abscisse cherchée est donc $-\dfrac{2}{3}$.

V.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - x + 1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$ en détaillant toute la démarche.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\left(x^2 - x + 1\right)}_{X} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad {}^* \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

* car la fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est une fonction polynôme du second degré.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto (\ln x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de g en 0^+ en détaillant toute la démarche.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto 1 - 2\dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de h en $+\infty$ en détaillant toute la démarche.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (limite de référence) donc par limite d'une différence : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$.

VI.

Donner le domaine de résolution de chacune des équations et inéquations suivantes puis les résoudre.

1°) $\ln\dfrac{1}{x} - \ln x \geqslant 0 \quad (1)$

domaine de résolution : $\mathbb{R}_+^*$; ensemble des solutions : $S_1 =]0\,;1]$

2°) $2\ln(x+1) \leqslant 1 \quad (2)$

domaine de résolution : $]-1\,;+\infty[$; ensemble des solutions : $S_2 = \left]-1\,;\sqrt{\mathrm{e}} - 1\right]$

3°) $\left(\mathrm{e}^x - 2\right)(\ln x + 1) = 0 \quad (3)$

domaine de résolution : $\mathbb{R}_+^*$; ensemble des solutions : $S_3 = \left\{\ln 2\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$

4°) $x^2 \ln x - 4\ln x = 0 \quad (4)$

domaine de résolution : $\mathbb{R}_+^*$; ensemble des solutions : $S_4 = \{1\,;2\}$

5°) $\ln 6 + \ln\dfrac{x}{2} \leqslant \ln\left(x^2\right) \quad (5)$

domaine de résolution : $\mathbb{R}_+^*$; ensemble des solutions : $S_5 = [3\,;+\infty[$

6°) $\ln|\,x\,| - 1 = 0 \quad (6)$

domaine de résolution : $\mathbb{R}^*$; ensemble des solutions : $S_6 = \{\mathrm{e}\,;-\mathrm{e}\}$

7°) $|\ln x - 1| = 2 \quad (7)$

domaine de résolution : $\mathbb{R}_+^*$; ensemble des solutions : $S_7 = \left\{\mathrm{e}^3\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$

Résolutions détaillées

• On résout (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow -\ln x - \ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -2\ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant \ln 1$

$\Leftrightarrow x \leqslant 1$

$S_1 =]0\,;1]$

On peut vérifier l'ensemble des solutions grâce à la calculatrice en traçant la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln\dfrac{1}{x} - \ln x$.

Autre méthode :

$(1) \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{x} \geqslant \ln x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - x^2}{x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

• On résout (2) dans $]-1\,;+\infty[$.

$(2) \Leftrightarrow \ln(x+1) \leqslant \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln(x+1) \leqslant \ln\sqrt{\mathrm{e}}$

$\Leftrightarrow x+1 \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$

$\Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}-1$

$S_2 =]-1\,;\sqrt{\mathrm{e}}-1]$

• On résout (3) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(3) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 2 = 0$ ou $\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2$ ou $\ln x = -1$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ ou $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$

$S_3 = \left\{\ln 2\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$

• On résout (4) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(4) \Leftrightarrow (x^2-4)\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ ou $\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ ou $x = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 1$

$S_4 = \{1\,;2\}$

• On résout (5) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(5) \Leftrightarrow \ln\left(6\times\frac{x}{2}\right) \leqslant \ln(x^2)$

$\Leftrightarrow \ln(3x) \leqslant \ln(x^2)$

$\Leftrightarrow 3x \leqslant x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 3$ ou $x \leqslant 0$

$S_5 = [3\,;+\infty[$

• On résout (6) dans $\mathbb{R}^*$.

$(6) \Leftrightarrow |x| = \mathrm{e}$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ ou $x = -\mathrm{e}$

$S_6 = \{\mathrm{e}\,;-\mathrm{e}\}$

• On résout (7) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(7) \Leftrightarrow \ln x - 1 = 2$ ou $\ln x - 1 = -2$

$\Leftrightarrow \ln x = 3$ ou $\ln x = -1$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^3$ ou $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$

$S_7 = \left\{\mathrm{e}^3\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$