**TS1**

# Contrôle du mardi 26 janvier 2016 (50 minutes)

**Prénom et nom :** ……………………………………………..……………

**Note : …….. / 20**

---

**I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)**

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x}}{4-x}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

---

**II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ en détaillant la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Le but de cette question est de déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Justifier brièvement que l'on rencontre une forme indéterminée.

Répondre à la question en effectuant une petite transformation d'écriture.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

---

**III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 16x + 27}{(x-3)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche et donner $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sans justifier. Interpréter graphiquement les résultats obtenus en rédigeant une phrase sur le modèle suivant : « D'après les limites calculées précédemment, la courbe $\mathscr{C}$ admet … ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu (même consigne qu'au 1°).

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

3°) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{4x-6}{(x-3)^3}$.

Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Compléter les extremums éventuels (valeurs exactes) et les limites calculées précédemment.

---

**IV. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 1 point ; c) 1 point ; d) 1 point)**

Soit ABCDEFGH un parallélépipède. On note I le milieu de [BC].

1°) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?
On répondra par une phrase en justifiant convenablement.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

2°) a) Démontrer que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AI}$.
Indication : on pourra commencer par écrire $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

b) Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils coplanaires ?

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

c) En déduire la position relative de la droite $(EB)$ et du plan $(AIG)$.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

d) On se propose de retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode sans utiliser les vecteurs.
On note O le centre du parallélépipède. Déterminer la position relative des droites $(OI)$ et $(EB)$. Conclure.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

# Corrigé du contrôle du 26-1-2016

**I.**

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x}}{4-x}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} (4-x) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x}}{4-x} = -\infty.$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (-2)^+} x = -2 \\ \lim\limits_{x \to (-2)^+} \sqrt{x+2} = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{x}{\sqrt{x+2}} = -\infty.$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

---

**II.**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ en détaillant la démarche.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une différence, } \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

2°) Le but de cette question est de déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Justifier brièvement que l'on rencontre une forme indéterminée.
Répondre à la question en effectuant une petite transformation d'écriture.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x^3}\right) = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } \infty - \infty \text{ ».}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{x-1}{x^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

---

**III.**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 16x + 27}{(x-3)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche et donner $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sans justifier. Interpréter graphiquement les résultats obtenus en rédigeant une phrase sur le modèle suivant : « D'après les limites calculées précédemment, la courbe $\mathscr{C}$ admet … ».

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad f(x) = \dfrac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 6x + 9}$$

$f$ est une fonction rationnelle donc on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré.

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$$

De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

D'après les limites calculées précédemment, la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu (même consigne qu'au 1°).

Il n'y a pas besoin de distinguer deux cas (car le dénominateur est de signe constant, toujours positif) !

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} \left(2x^2 - 16x + 27\right) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 3} (x-3)^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty.$$

D'après cette limite, la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $x = 3$ pour asymptote verticale.

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

3°) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{4x-6}{(x-3)^3}$.

Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
Compléter les extremums éventuels (valeurs exactes) et les limites calculées précédemment.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $4x-6$ | | $-$ | $0^{\text{num}}$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $(x-3)^3$ | | $-$ | | $-$ | $0^{\text{dén}}$ | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0^{\text{num}}$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $2$ | $\nearrow$ | $\frac{10}{3}$ | $\searrow$ | $-\infty \;\Vert\; -\infty$ | $\nearrow$ | $2$ |

## IV.

Soit ABCDEFGH un parallélépipède. On note I le milieu de [BC].

1°) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?
On répondra par une phrase en justifiant convenablement.

Les points A, B, E, I ne sont pas coplanaires donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

Un certain nombre d'élèves a mal répondu à la question.

2°) a) Démontrer que $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{AI}$ .
Indication : on pourra commencer par écrire $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ &= 2\overrightarrow{AI} \quad \text{(on utilise une propriété des vecteurs en sachant que I est le milieu de } [\text{BC}])\end{aligned}$$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils coplanaires ?

D'après l'égalité démontrée à la question précédente, on a $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{EB}$ donc il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AI}+\beta\overrightarrow{EB}$.
Donc $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

c) En déduire la position relative de la droite $(\text{EB})$ et du plan $(\text{AIG})$.

D'après la question précédente, $(\text{EB})//(\text{AIG})$.

Comme B et E n'appartiennent pas au plan $(\text{AIG})$, on peut dire que la droite $(\text{EB})$ n'est pas incluse dans le plan $(\text{AIG})$.
Par suite, $(\text{EB})$ est strictement parallèle au plan $(\text{AIG})$ (petite précision qui n'était pas attendue de la part de l'élève).

d) On se propose de retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode sans utiliser les vecteurs.
On note O le centre du parallélépipède. Déterminer la position relative des droites $(\text{OI})$ et $(\text{EB})$. Conclure.

O est le centre du parallélépipède et I est le milieu de $[\text{BC}]$, donc d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle BCE, $(\text{OI})//(\text{BE})$.
Or $\text{O}\in(\text{AIG})$. Donc $(\text{OI})$ est incluse dans le plan $(\text{AIG})$. Or si une droite est parallèle à une droite d'un autre plan alors elle est parallèle à ce plan. Donc $(\text{EB})//(\text{AIG})$.