TS1

Contrôle du mardi 12 janvier 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

I. (10 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) a) 2 points ; b) 1 point ; c) 1 point ; 5°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^2 x \times \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que f est périodique.

……...

……...

……...

2°) Démontrer que f est paire.

……...

……...

……...

……...

3°) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \sin x\left(3\cos^2 x - 1\right)$ (justification de la dérivabilité non demandée).

……...

……...

……...

……...

……...

4°) On note α le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\dfrac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

b) Calculer la valeur exacte de $f(\alpha)$ et compléter le tableau de variations ci-dessus avec cette valeur.

$f(\alpha) =$ .... (un seul résultat sous la forme la plus simple possible)

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de α.

……………………………… (un seul résultat, sans égalité)

5°) Calculer les images par f de $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ (valeurs exactes).

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$	$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) =$	$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) =$ ....

II. (2 points : 1 point + 1 point)

Calculer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{3}{\sin^4 x}$ et $g : x \mapsto \cos^5(2x)$.
Détailler les calculs sur les lignes ci-dessous (les ensembles de dérivabilité ne sont pas demandés).

$f\,'(x) =$	$g\,'(x) =$ ....

………

………

………

………

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \times \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a : $f\,'(x) = (\cos x - \sin x) \times \mathrm{e}^x$.

………

………

2°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a : $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

………

………

………

………

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points)

Déterminer l'ensemble des solutions *S* dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos x$.

………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 12-1-2016

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^2 x \times \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que *f* est périodique.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) \times \cos(x+2\pi)$$

$$= \sin^2 x \times \cos x$$

$$= f(x)$$

On en déduit que *f* est périodique de période 2π.

2°) Démontrer que *f* est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \sin^2(-x) \times \cos(-x)$$

$$= (-\sin x)^2 \times \cos x$$

$$= \sin^2 x \times \cos x$$

$$= f(x)$$

On en déduit que *f* est paire.

3°) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \sin x\left(3\cos^2 - 1\right)$ (justification de la dérivabilité non demandée).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\cos x \times \sin x \times \cos x + \sin^2 x \times (-\sin x)$$

$$= 2\cos^2 x \times \sin x - \sin^3 x$$

$$= \sin x\left(2\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

$$= \sin x\left(2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x\right)$$

$$= \sin x\left(3\cos^2 x - 1\right)$$

4°) On note α le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes.

On écrit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sin x\left(\cos x \times \sqrt{3} - 1\right)\left(\cos x \times \sqrt{3} + 1\right)$

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\sin x$	0	$+$		$+$	
Signe de $\cos x \times \sqrt{3} - 1$		$+$	0	$-$	
Signe de $\cos x \times \sqrt{3} + 1$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de *f*	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

On étudie le signe des facteurs avec le cercle trigonométrique (à tracer).

Le signe de $\sin x$ ne pose pas de problème.

Le signe de $\cos x \times \sqrt{3} - 1$ s'obtient en résolvant l'équation $\cos x \times \sqrt{3} - 1 = 0$ et les inéquations $\cos x \times \sqrt{3} - 1 > 0$ et $\cos x \times \sqrt{3} - 1 < 0$. On utilise le réel α défini dans l'énoncé comme réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour le signe de $\cos x \times \sqrt{3} + 1$, on écrit que $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \quad \cos x \geqslant 0$ donc $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \quad \sqrt{3}\cos x \geqslant 0$.

Par suite, $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \quad \cos x \times \sqrt{3} + 1 > 0$.

b) Calculer la valeur exacte de $f(\alpha)$ et compléter le tableau de variations ci-dessus avec cette valeur.

$$f(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \text{(un seul résultat sous la forme la plus simple possible)}$$

On a $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ par définition de α. Or $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Donc $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

$$f(\alpha) = \sin^2\alpha \times \cos\alpha = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de α.

0,955 (un seul résultat, sans égalité)

5°) Calculer les images par f de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ (valeurs exactes).

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{8}$

II.

Calculer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \frac{3}{\sin^4 x}$ et $g : x \mapsto \cos^5(2x)$.
Détailler les calculs sur les lignes ci-dessous (les ensembles de dérivabilité ne sont pas demandés).

$f'(x)=-\frac{12\cos x}{\sin^5 x}$	$g'(x)=-10\sin 2x\times\cos^4 2x$

On ne demande pas le domaine de définition ni de dérivabilité.

Pour f, on écrit d'abord $f(x)=3\times\frac{1}{\sin^4 x}=3\times\frac{1}{(\sin x)^4}$.

On utilise la formule $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu'}{u^{n+1}}$ avec $u : x \mapsto \sin x$ et $n=4$.

$$f'(x)=3\times\left(-\frac{4\cos x}{\sin^5 x}\right)$$

$$=-\frac{12\cos x}{\sin^5 x}$$

$$g'(x)=-5\times 2\sin 2x\times\cos^4 2x$$

$$=-10\sin 2x\times\cos^4 2x$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x\times\cos x$ définie sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=(\cos x-\sin x)\times e^x$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=e^x\times\cos x+e^x\times(-\sin x)$$

$$=(\cos x-\sin x)\times e^x$$

2°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

On peut partir du deuxième membre pour arriver au premier.

On utilise la formule d'addition du cosinus : $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$$

$$=\cos x-\sin x$$

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les solutions de l'équation $f'(x)=0$ (1).

D'après la question précédente, $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^x$.

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ ou } e^x=0 \text{ (impossible)}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$ [on utilise l'équivalence $\cos X=0 \Leftrightarrow X=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$]

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les nombres de la forme $\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

IV.

Déterminer l'ensemble des solutions S dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

$$S=\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{15}+\frac{2k'\pi}{5},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$$