TS1

Contrôle du mardi 5 janvier 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors des réponses attendues.

I. (2 points)

Pour tout entier naturel *n*, on pose $z_n=\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$.

Exprimer $\left|\,z_n\,\right|$ en fonction de *n* sous la forme la plus simple possible.

……..

……..

……..

II. (2 points)

Calculer le module du nombre complexe $z=\sqrt{2}+2+\mathrm{i}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (2 points)

Pour tout nombre complexe *z*, on pose $Z=3z+\mathrm{i}\bar{z}$.

Démontrer que, pour tout nombre complexe *z*, on a $\left|\,Z\,\right|\leqslant a\left|\,z\,\right|$ où *a* est une constante réelle positive (à déterminer !).

……..

……..

……..

……..

……..

Dans les exercices **IV** et **V**, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

IV. (7 points : 3 points + 3 points + 1 point)

On note A et B les points de *P* d'affixes respectives 3i et $\mathrm{i}-3$.

Déterminer les ensembles E_1, E_2, E_3 ainsi définis :

$E_1=\left\{\mathrm{M}(z)\in P\,/\,\left|\,\mathrm{i}\bar{z}-3\,\right|=5\right\}$; $E_2=\left\{\mathrm{M}(z)\in P\,/\,\left|\,1+\mathrm{i}(z+3)\,\right|=2\right\}$; $E_3=\left\{\mathrm{M}(z)\in P\,/\,\left|\,\mathrm{i}\bar{z}-3\,\right|=\left|\,1+\mathrm{i}(z+3)\,\right|\right\}$.

On rédigera complètement la recherche des ensembles E_1 et E_2 et l'on donnera uniquement la réponse sans détailler pour E_3.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……

……

……

……

……

……

……

……

……

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$.

1°) Exprimer $|f(z)|$ en fonction de $|z|$.

……

……

……

2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P, d'affixe z, tels que $f(z)=z$.

……

……

……

3°) Calculer $f\left[f(z)\right]$ pour $z\in\mathbb{C}^*$.

……

……

……

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Soit ABCDEFGH un cube.

1°) Quel est le plan médiateur de [EG] ? Répondre sans justifier.

……

2°) Démontrer que les droites (DF) et (EG) sont orthogonales.

……

……

……

……

……

……

3°) Démontrer que les plans (DBF) et (BEG) sont perpendiculaires.

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 5-1-2016

I.

Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = \left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$.

Exprimer $|z_n|$ en fonction de n sous la forme la plus simple possible.

$$|z_n| = \left|1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^n$$

$$= \left(\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}\right)^n$$

$$= \left(\sqrt{4}\right)^n$$

$$= 2^n$$

II.

Calculer le module du nombre complexe $z = \sqrt{2}+2+\mathrm{i}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}+2\right)^2+\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}$$

$$= \sqrt{2+4\sqrt{2}+4+8-4\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{15}$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice (commande de calcul du module d'un nombre complexe).

III.

Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = 3z+\mathrm{i}\bar{z}$.
Démontrer que, pour tout nombre complexe z, on a $|Z| \leqslant a|z|$ où a est une constante réelle positive (à déterminer !).

On a : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Z| \leqslant |3z|+|\mathrm{i}\bar{z}|$ (inégalité triangulaire pour les nombres complexes*)

Donc $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Z| \leqslant |3z|+|\mathrm{i}\bar{z}|$ soit $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Z| \leqslant 3|z|+|z|$ (car $|\mathrm{i}\bar{z}| = |\mathrm{i}|\times|\bar{z}| = 1\times|z| = |z|$).

On obtient $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Z| \leqslant 4|z|$.

Donc $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Z| \leqslant a|z|$ avec $a = 4$ (on vérifie que $a > 0$)

* L'inégalité triangulaire pour les nombres complexes dit que $\forall (u\,;u') \in \mathbb{C}^2 \quad |u+u'| \leqslant |u|+|u'|$.
On l'applique ici avec $u = 3z$ et $u' = \mathrm{i}\bar{z}$.

Dans les exercices **IV** et **V**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

IV.

On note A et B les points de P d'affixes respectives $3\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}-3$.
Déterminer les ensembles E_1, E_2, E_3 ainsi définis :
$E_1 = \left\{\mathrm{M}(z) \in P \,/\, |\mathrm{i}\bar{z}-3| = 5\right\}$; $E_2 = \left\{\mathrm{M}(z) \in P \,/\, |1+\mathrm{i}(z+3)| = 2\right\}$; $E_3 = \left\{\mathrm{M}(z) \in P \,/\, |\mathrm{i}\bar{z}-3| = |1+\mathrm{i}(z+3)|\right\}$.
On rédigera complètement la recherche des ensembles E_1 et E_2 et l'on donnera uniquement la réponse sans détailler pour E_3.

La méthode consiste à écrire chaque module sous la forme $|z-w|$ où w est un nombre complexe de manière à faire apparaître des distances.

On peut très bien faire ce travail en dehors des équivalences.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\mathrm{M} \in E_1 \Leftrightarrow |\mathrm{i}\bar{z}-3| = 5$$

$$\Leftrightarrow \left|\mathrm{i}\left(\bar{z}+3\mathrm{i}\right)\right| = 5$$

$$\Leftrightarrow |\mathrm{i}|\times|\bar{z}+3\mathrm{i}| = 5$$

$$\Leftrightarrow 1\times|\bar{z}+3\mathrm{i}| = 5 \quad (\text{car } |\mathrm{i}| = 1)$$

$$\Leftrightarrow |\bar{z}+3\mathrm{i}| = 5$$

$$\Leftrightarrow \left|\overline{z-3\mathrm{i}}\right| = 5$$

$$\Leftrightarrow |z-3\mathrm{i}| = 5$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{AM} = 5$$

E_1 est le cercle de centre A et de rayon 5.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\text{M} \in E_2 \Leftrightarrow \left|1+\text{i}(z+3)\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\text{i}(-\text{i}+z+3)\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\text{i}\right| \times \left|-\text{i}+z+3\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \left|-\text{i}+z+3\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left|z-\text{i}+3\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left|z-(\text{i}-3)\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{BM} = 2$$

E_2 est le cercle de centre B et de rayon 2.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\text{M} \in E_3 \Leftrightarrow \left|\text{i}\bar{z}-3\right| = \left|1+\text{i}(z+3)\right|$$

$$\Leftrightarrow \text{AM} = \text{BM}$$ (on reprend les calculs effectués pour E_1 et pour E_2)

$$\Leftrightarrow \text{MA} = \text{MB}$$

E_3 est la médiatrice du segment $[\text{AB}]$.

V.

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

1°) Exprimer $\left|f(z)\right|$ en fonction de $\left|z\right|$.

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left|f(z)\right| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{\left|\bar{z}\right|} = \frac{1}{\left|z\right|}$$

2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P, d'affixe z, tels que $f(z) = z$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z $\left(z \in \mathbb{C}^*\right)$.

$$\text{M} \in E \Leftrightarrow f(z) = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = z$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|z\right|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|z\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{OM} = 1$$

Donc E est le cercle de centre O et de rayon 1.

3°) Calculer $f\left[f(z)\right]$ pour $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad f\left[f(z)\right] = \frac{1}{\overline{f(z)}} = \frac{1}{\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{\bar{z}}}} = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z$$

Dans cette question, on détermine en fait la composée de f avec elle-même notée $f \circ f$.

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad (f \circ f)(z) = z$$

On peut dire que $f \circ f$ est l'application identité de $\mathbb{C}^*$, notée $\text{id}_{\mathbb{C}^*}$.

On peut écrire l'égalité fonctionnelle suivante : $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$. On dit que f est une application involutive de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même.

VI.

Soit ABCDEFGH un cube.

On commence par faire une figure assez grande au brouillon.

1°) Quel est le plan médiateur de $[\text{EG}]$? Répondre sans justifier.

Le plan médiateur du segment [EG] est le plan (FDB).

2°) Démontrer que les droites (DF) et (EG) sont orthogonales.

(FDB) est le plan médiateur du segment [EG] donc (EG) est orthogonale à (FDB).
Or si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes droites de ce plan.
Or (DF) $\subset$ (DBF).
Donc (DF) et (EG) sont orthogonales.

3°) Démontrer que les plans (DBF) et (BEG) sont perpendiculaires.

(DBF) est le plan médiateur de [EG] donc (EG) est orthogonale à (DBF).
De plus, $(\text{EG}) \subset (\text{BEG})$.
Or si une droite d'un plan est orthogonale à un autre plan, alors les deux plans sont perpendiculaires.
Donc (DBF) et (BEG) perpendiculaires.