TS1

Devoir pour le lundi 4-1-2016

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

On ne cherchera pas à déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n (il n'existe pas de formule simple permettant d'exprimer u_n en fonction de n).

1°) Étudier le sens de variation de (u_n).

2°) a) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$ on a $1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

b) Déterminer une expression simplifiée du produit $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$ pour $n \geqslant 2$ (on attend une expression sans le symbole de produit).

Indication : écrire $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k}{k-1} \times \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k}{k+1}$.

c) À l'aide du résultat précédent, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n \leqslant 4$.

3°) Déduire des questions précédentes que (u_n) converge.

On peut démontrer – avec des outils qui dépassent largement le niveau de la terminale – que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$ (cf. article « Produit infini » sur Wikipedia).

Corrigé du DM pour le 4-1-2016

Ce devoir est l'occasion de travailler le symbole $\prod$, moins utilisé que le symbole $\sum$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

Il n'est pas possible de donner une expression explicite de u_n.

1°) **Étudions le sens de variation de (u_n).**

On va utiliser la méthode par quotient (méthode la plus adaptée ici).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > 0$ (condition à vérifier pour pouvoir appliquer la méthode par quotient).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n+1}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)} = 1+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1+\frac{1}{(n+1)^2} > 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

On en déduit que (u_n) est strictement croissante.

Variante : méthode directe

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$1+\frac{1}{(n+1)^2} > 1$ et $u_n > 0$ donc $u_n \times \left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) > u_n$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} > u_n$.

On en déduit que (u_n) est strictement croissante.

2°)

a) **Démontrons que $\forall k \geqslant 2 \quad 1+\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.**

On applique la méthode par différence : on calcule la différence (premier membre – second membre) et on démontre qu'elle est positive ou nulle.

$$\forall k \geqslant 2 \quad \frac{k^2}{(k+1)(k-1)} - \left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \frac{k^2}{k^2-1} - \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \frac{k^2 \times k^2 - (k^2+1)(k^2-1)}{k^2(k^2-1)}$$

$$= \frac{k^4 - (k^4-1)}{k^2(k^2-1)}$$

$$= \frac{1}{k^2(k^2-1)}$$

Or $\forall k \geqslant 2 \quad k^2(k^2-1) > 0$ donc $\forall k \geqslant 2 \quad \frac{k^2}{(k+1)(k-1)} - \left(1+\frac{1}{k^2}\right) \geqslant 0$.

Donc $\forall k \geqslant 2 \quad 1+\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

b) **Déterminons une expression simplifiée de $\prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} \quad (n \geqslant 2)$.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k}{k-1} \times \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k}{k+1}$$

$$\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k}{k-1}=\frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\ldots\times\frac{n}{\cancel{n-1}}$$ (méthode par télescopage ou simplification en cascade)

$$=n$$

$$\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k}{k+1}=\frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\ldots\times\frac{\cancel{n}}{n+1}$$

$$=\frac{2}{n+1}$$

$$\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}=n\times\frac{2}{n+1}$$

$$=\frac{2n}{n+1}$$

c) **Démontrons que $\forall n\geqslant 1\ \ u_n\leqslant 4$.**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On distingue deux cas.

1er cas : $n=1$

Dans ce cas, on a : $u_1=1+\frac{1}{1^2}=2$.

Donc $u_1\leqslant 4$

2e cas : $n\geqslant 2$

$$u_n=2\times\prod_{k=2}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

On utilise l'inégalité démontrée au a).
On a le droit d'utiliser la règle de multiplication membre à membre d'inégalités de même sens ne comportant que des nombres positifs ou nuls.

On obtient : $u_n\leqslant 2\times\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2}{k^2-1}$.

D'après la question b), on a donc $u_n\leqslant 2\times\frac{2n}{n+1}$ soit $u_n\leqslant\frac{4n}{n+1}$.

Or $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$ donc $u_n \leqslant 4$.

En rassemblant les deux cas, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n \leqslant 4$.

3°) **Déduisons-en que (u_n) converge.**

D'après la question 1°), (u_n) est strictement croissante et d'après la question 2°) c), elle est majorée.

Or toute suite croissante et majorée converge.

Donc (u_n) converge.

Grâce à la question 2°) c), on peut écrire que la limite L de la suite (u_n) vérifie $\mathrm{L} \leqslant 4 \quad (1)$.

Or d'après l'énoncé, $\mathrm{L} = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\mathrm{L} = 3,6760779\ldots$.

On voir donc que l'inégalité (1) n'est pas trop « mauvaise ».

Il est probable que l'expression $\mathrm{L} = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}$ permette de démontrer que L est un nombre irrationnel et même transcendant.

Pour aller plus loin :

① On peut rentrer la suite dans la calculatrice.

$\mathrm{nMin} = 1$
$\mathrm{u}(n) = \mathrm{prod}\left(\mathrm{suite}\left(1+\left(1/\mathrm{K}^2\right), \mathrm{K}, 1, n\right)\right)$

Pour le modèle TI-83 « évolués » (par exemple, TI 83 Premium CE), on doit remplir :

Suite :
Expr : $1+\left(1/\mathrm{K}^2\right)$
Variable : K
Début : 1
Fin : n
Pas : 1
Coller

Ça se remplit alors automatiquement c'est-à-dire que l'on obtient directement
$\mathrm{u}(n) = \mathrm{prod}\left(\mathrm{suite}\left(1+\left(1/\mathrm{K}^2\right), \mathrm{K}, 1, n\right)\right)$.

② On peut aussi chercher des valeurs « seuils ».
Par exemple, on peut chercher le plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{L} - u_n \leqslant 0{,}1$.

Pour cela, on rentre la suite $\left(\mathrm{L} - u_n\right)$ dans la calculatrice avec la formule :
$\mathrm{u}(n) = \left(\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right)/(2\pi)\right) - \mathrm{prod}\left(\mathrm{suite}\left(1+\left(1/\mathrm{K}^2\right), \mathrm{K}, 1, n\right)\right)$.

Ensuite, on va dans la table.

On trouve $\mathrm{L} - u_{35} = 0{,}102086657...$ et $\mathrm{L} - u_{36} = 0{,}099328948...$.

L'entier naturel n cherché est donc 36.

On constate que la calculatrice « rame » beaucoup pour afficher le tableau de valeurs.
Un tableur est plus adapté pour trouver d'autres valeurs seuils.